


UNIVERSITÉ PARIS 1  
PANTHÉON SORBONNE  
OMNIBUS SAPIENTIA UNICUIQUE EXCELLENTIA

Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,  
**Institut de démographie**



*Cours d'analyse démographique (modèles de population) (Master de démographie) par Alexandre Avdeev*




## Deuxième partie : Modèles de populations

### Introduction : Principes de modélisation

Présentation du cours – bibliographie et lectures - notion d'un modèle -  
élément d'un modèle - objet de modélisation en démographie etc.

1

## Manuels et lecture









**Roland Pressat** (1995) *Éléments de démographie mathématique*. Paris. AIDELF, 279 p. (ISBN 2-9509356-0-5; ISSN 1160-1531)

**Jean Bougeois-Pichat** (1994) *La Dynamique des Populations*. Paris, PUF. Série « Travaux et Document » de l'INED, Cahier n°133, 296 p.  
ISBN-10: 2733201336 ; ISBN-13: 978-2733201336

**Noël Bonneuil** (1997) *Introduction à la modélisation démographique: 26 problèmes corrigés*. Paris : Armand Colin, 128 p.

**Nations Unies** (1984) *Manuel X. Techniques indirectes d'estimation démographiques*. United Nations Publication. New York ST/ESA/SER.A/81  
disponible **en français** sur [http://unstats.un.org/unsd/demographic/standmeth/handbooks/Manuel\\_X-fr.pdf](http://unstats.un.org/unsd/demographic/standmeth/handbooks/Manuel_X-fr.pdf)  
**en anglais** sur [http://www.un.org/esa/population/publications/Manual\\_X/Manual\\_X.htm](http://www.un.org/esa/population/publications/Manual_X/Manual_X.htm)

Les manuels pour "Spectrum Policy Modeling System" = **Spectrum** by Futures groups  
– (en français) sur <http://www.healthpolicyproject.com/index.cfm?id=software&get=Spectrum>  
version 6.08 (12 Mai 2021) disponible sur "Avenir Health" <https://www.avenirhealth.org/software-spectrum.php>

IUSSP, *Outils d'estimation démographique* disponible  
**sur** <http://demographicestimation.iussp.org/fr/content/outils-d%27estimation-d%3%A9mographique-0>

Tous les matériaux de ce cours (présentations, exercices etc. sont disponibles sur l'EPI :  
<https://cours.univ-paris1.fr/fixe/IDUP-modeles-de-populations>

Les matériaux du cours M 1 « Analyse démographique » sont disponibles sur  
<https://cours.univ-paris1.fr/fixe/IDUP-M1-Analyse-Demographique>  
et bien sur avec beaucoup d'autres cours sur <http://dmo.econ.msu.ru/teaching/>

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie)

2

## Objectifs et structure du cours

- Dans la première partie du cours :
  - on étudiait les méthodes de construction des indicateurs démographiques et de description formelle (formalisation) des populations (effectif, structures) et des phénomènes démographiques (mortalité, fécondité, nuptialité)
  - on cherchait à présenter (ou à réduire) les phénomènes sociaux extrêmement complexes avec des abstractions simplificatrices de nature quantitative. Ex. g. : la fécondité s'est transformée à l'indice synthétique de fécondité ; la population a été réduite à un nombre (effectifs) ou à une série de nombres et de relations (rapport de sexes etc.)
  - nos calculs des indicateurs et leurs interprétations se sont basés sur l'hypothèse sur la stationnarité (i.e. un modèle de la population stationnaire)
  - on examinait en quelle mesure la dynamique réelle d'un phénomène démographique correspond à la dynamique ses indicateurs descripteurs et inversement (*e.g. dynamique du TFT et dynamique du nombre moyen d'enfants*)
  - en résumé : on étudiait les principes (et les règles) de la quantification des objets / des phénomènes démographiques, de construction des indicateurs et les interprétations des scores de ces indicateurs
- Dans la deuxième partie du cours, on s'intéressera aux rapports quantitatifs entre les indicateurs démographiques du pont de vue systémique
  - on va chercher les liens quantitatifs entre les indicateurs
  - on va formaliser ces liens ou de les présenter sous forme des équations mathématiques
  - on va essayer de trouver les lois fondamentales de ces liens

## Objectif, vocation et missions de la modélisation démographique

- **Les modèles démographiques** sont des descriptions mathématiques et *systémiques* des populations et des phénomènes relatifs à son mouvement, elles sont non contradictoires et conformes aux observations statistiques.
- **L'objectif ou le but principale de la modélisation démographique** est de mettre en évidence les liens entre les caractéristiques quantitatives des phénomènes et des objets démographiques afin **d'établir à partir des résultats d'études empiriques les règles mathématiques d'estimation** des caractéristiques quantitatives (paramètres) des *objets inaccessibles pour l'observation directe* à partir caractéristiques observées ou prédéfinies des autres objets.
- **La vocation d'un modèle démographique** est de fournir au chercheur des instruments fiables *pour des prévisions du comportement d'un objet démographique* dans de diverses *situations réelles et imaginées* afin de résoudre des problèmes pratiques de gestion et de trouver une stratégie optimale des politiques de population.
- **La mission essentielle** de la modélisation démographique est de produire les estimateurs fiables de tous les paramètres du modèle pour qu'il soit le plus adéquat au comportement d'un objet démographique réel.

## Un modèle est une image simplifiée de la réalité : les avantages des modèles

### 1. Une possibilité d'évaluer la qualité des données et de réparer leurs défauts :

- ✓ La comparaison avec un modèle permet de repérer des particularités des données observées y compris celles liées aux erreurs d'observation et de l'enregistrement.
- ✓ Le modèle permet de distinguer l'évolution tendancielle et des fluctuations aléatoires, de lisser (réparer) les données non régulières ou remplir des lacunes d'observation.

### 2. Une estimation indirecte des indicateurs démographiques :

- ✓ Avec le recours aux méthodes statistiques il est plus facile d'estimer un ou deux que plusieurs paramètres.
- ✓ Un modèle permet aussi d'estimer les variables (les paramètres) non observées

### 3. Études des facteurs de l'évolution démographique:

- ✓ **L'interprétation qualitative** des paramètres des modèles démographiques est le plus souvent transparente et sans équivoque (âge moyen, calendrier etc.).
- ✓ La dynamique des valeurs (score) d'un paramètre illustre l'évolution du comportement démographique (en réalité quand on parle d'un phénomène démographique, de fait il s'agit d'un paramètre : fécondité = TFT; mortalité =  $e_0$ ; vieillissement =  $S_{60}/S_0$ ; etc.)
- ✓ Les modèles permettent de mettre en évidence **les relations causales** entre les phénomènes démographiques et non démographiques

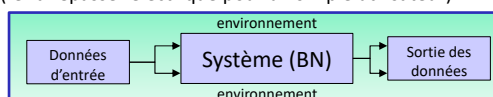
Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie)

5

5

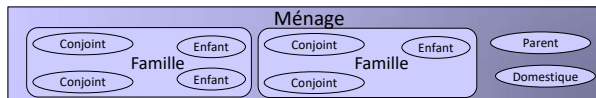
## Types des modèles

- **Boite noire (BN)**: une image la plus simple de la réalité sans moindre information sur la nature et l'essence du système (fer à repasser électrique pour un simple utilisateur)



problème d'application: il se peut que les systèmes différents produisent les mêmes effets

- **Modèle de composition**: une image structurée d'un système (éléments, sous-systèmes), e.g. un organigramme



problème d'application: on peut produire les modèles différents en fonction

- 1) de nos connaissances,
- 2) de différentes définitions (approches à la définition) des éléments (catégorie),
- 3) de nos objectifs

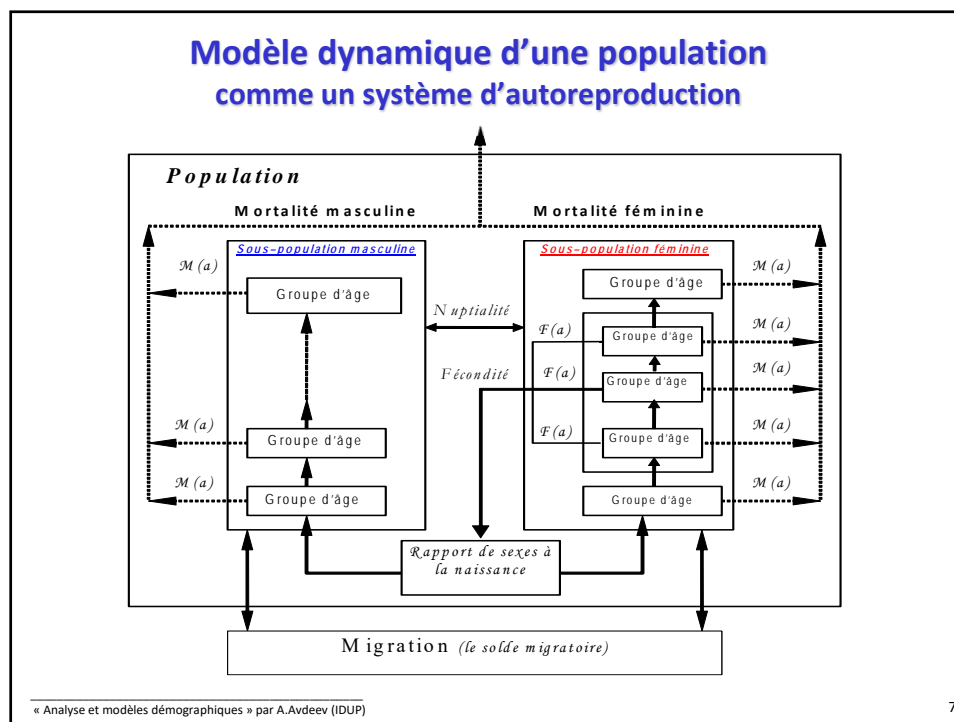
e.g. le modèle de l'université du point de vue de l'administration, de l'étudiant et de l'enseignant n'est pas forcément le même

- **Modèle de structure (boite blanche)** : une image structurée d'un système (éléments, sous-systèmes) avec liens entre les éléments et les sous-systèmes, leurs fonctions, leur hiérarchie, les limites de fonctionnement, leurs relations avec l'environnement etc. (fer à repasser électrique pour un électricien)

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie)

6

6



7

## Formes des modèles (démographiques)

### Modèle dynamique généralisé:

Soit  $y(t)$  et  $x(t)$  sont deux variables (**aléatoire**) datées, on peut donc décrire leur interrelation générale par :

$$y(t) = \alpha + \beta_0 * y(t-1) + \beta_1 * x(t) + \beta_2 * x(t-1) + \varepsilon(t)$$

où  $\alpha$  et  $\beta_i$  sont paramètres du modèle généralisé et  $\varepsilon(t)$  est le résidu qui est une valeur aléatoire non expliquée par le modèle, telle que  $E(\varepsilon) \approx 0$ , ou  $E(\varepsilon) \rightarrow 0$

Dans ce cas la variable  $y(t)$  est considérée comme dépendante (on dit : expliqué, endogène, output etc.), et  $x(t)$  comme une variable explicative (on dit : indépendante, exogène, régresseur, input etc.)

### Modèles restreints (spécifiques, les cas particuliers du dynamique modèle généralisé):

1. Modèle statique :  $y(t) = \alpha + \beta * x(t) + \varepsilon(t)$
2. Modèle autorégressif (à retard) :  $y(t) = \alpha + \beta * y(t-1) + \varepsilon(t)$
3. Modèle à anticipation :  $y(t) = \alpha + \beta * x(t-1) + \varepsilon(t)$
4. Modèle à anticipation distribuée:  $y(t) = \alpha + \beta_0 * x(t) + \beta_1 * x(t-1) + \varepsilon(t)$
5. Modèle d'accroissement:  $y'(t) = \alpha + \beta * x(t) + \varepsilon(t)$
6. Modèle de la correction partielle:  $y(t) = \alpha + \beta_0 * y(t-1) + \beta_1 * x(t) + \varepsilon(t)$

S'il y a plusieurs variables explicatives on écrit :

$$y(t) = \alpha + \sum_i [\beta_i * x_i(t)] + \varepsilon(t) \rightarrow \text{cocktail avec } i=1,2,\dots,n \text{ (ingrédients)}$$

8

## Étapes de construction d'un modèle démographique

- **Deux types d'informations de départ :**
  - Qualitatives → des concepts généraux démographiques, sociologiques, psychologiques, économiques etc.
  - Quantitatives → les résultantes des observations (les séries chronologiques plus ou moins longues, les séries de distributions plus ou moins stables)
- **Étapes de construction :**
  - Spécification du modèle et la quantification des paramètres. Exemples :
    - fécondité →  $TFT = \sum f_i \times w_i$  ;
    - utilisation de la contraception → % des femmes âgées de 15-49 ans qui utilisent les moyens de la contraception ; etc.
  - Collecte et traitement des données empiriques
  - Estimation quantitative des paramètres du modèle (calculs des indicateurs – estimateurs)
  - Vérification de l'adéquation /conformité du modèle à la réalité (études historiques et comparatives)
- **Notions et définition de base :**
  - **objet / phénomènes** → populations, natalité, mortalité, fécondité, migration etc.
  - **variables / système des indicateurs descripteurs**
    - à chaque état d'un objet correspond une valeur concrète d'un indicateur qui l'incarne (on dit « le niveau » : en 2008 la fécondité en France = 1,99 => ISF=1,99)
    - la nature de l'indicateur est constante, mais le niveau est variable, par conséquent, on parle des « variables démographiques »
  - **modèle** est une expression mathématique des liens entre les indicateurs descripteurs (variables) de l'objet, un modèle peut être représenté comme
    - un graphique ou une série de graphiques
    - comme un tableau ou une série des tables
    - comme un système des équations et/ou des inéquations

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie)

9

9

## Spécification et classification des modèles et des variables

**Spécification d'un modèle** est une description détaillée du comportement d'un objet à l'aide du langage mathématique

### Premier principe de la spécification d'un modèle:

Un modèle se réalise comme une traduction en langage mathématique des lois (des régularités) induites par la **théorie démographique générale** ou à partir de l'observation d'expériences particulières.

Ex.: fécondité vs éducation →  $F = \alpha_0 + \alpha_1 E + \varepsilon$  ou  $F = Y(E)$  :  $F$  et  $E$  – variables,  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  – paramètres =>  $(\alpha_0, \alpha_1) > 0$

**Variable endogène** (dépendante) est une variable qui se forme à l'intérieur du modèle (ses scores sont produits par le modèle même) ex.:  $F$

**Question: (spécification de F=? Probabilité ? Catégorie ?)**

**Variable exogène** (indépendante) est une variable dont les scores sont formés à l'extérieur du modèle ex:  $E$

### Classification des modèles:

On appelle « **modèles fermés** » ceux qui ne comportent que des variables endogènes

On appelle « **modèles ouverts** » ceux qui comportent au moins une variable exogène

### Second principe de la spécification d'un modèle :

dans un modèle le nombre d'équations doit être égal au nombre de variables endogènes (ce principe est important pour la vérification que la transcription du modèle soit correcte)

### Troisième principe de la spécification d'un modèle démographique :

il est nécessaire que les variables soient toujours rapportées à un moment de temps

On appelle « **modèles dynamiques** » (modèles de *séries temporelles*) ceux dont les variables sont dépendantes du temps

On appelle « **variables datées** » ou variables temporaires celles qui varient en fonction de temps

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie)

10

10

## Résumé

- Un modèle démographique est une représentation mathématique de liens entre les variables d'un objet démographique
- Modèles démographiques sont composés des variables et des paramètres
- On distingue les variables internes (endogènes) et les variables externe (exogène)
- Modèle peut comporter plusieurs équations (système d'équations) ou une seule équation isolée
- Première étape de la construction d'un modèle est sa spécification
- Il y a trois principes de spécification :
  - de l'exprimer en langage mathématique
  - que le nombre d'équations soit au moins égal au nombre de variables endogène
  - les variables doivent être définies en fonction de temps, si cela est possible
- Modèle peut représenter des graphiques, des tableaux ou/et des expressions analytiques (équations)
- Modélisation est nécessaire pour présenter les états d'un objet qu'on ne peut pas observés directement

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie)

11

11

## Quelques exemples des autorégressifs (modèles d'évolution)

**Modèles à retard échelonné**  $\rightarrow y_t = \alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i \cdot x_{t-i} + \varepsilon_t$   $\beta_0$  – multiplicateur à court terme  
 $\Sigma \beta_i$  – multiplicateurs à long terme

une variable endogène datée d'un moment (période) donné est dépendante des variables exogènes datées des moments (périodes) antérieurs

**Exemple** : tiré du modèle « World 3 » Cf. Dennis L. Meadows Dynamics of Growth in a Finite World, Wright-Allen Press, 1974, 367 p.

$$DTF_t = \delta \cdot N(i_{t-20}) \cdot RN(i_{t-3}) \cdot M(e_{t-20})$$

$DTF_t$  – la fécondité désirée ;

$N(i_{t-20})$  – la norme de taille de la famille (fonction de  $i(t-20)$ ) - la production industrielle par habitant il y a 20 ans) ;

$RN(i_{t-3})$  – la réaction de la famille à la norme (fonction de  $i(t-3)$ ) ;

$M(e_{t-20})$  – l'influence de la mortalité infantile (fonction de  $e_0(t-20)$ ) – espérance de vie à la naissance il y a 20 ans).

Modèle « World 3 » : outil de simulation sur <https://insightmaker.com/> (anciennement sur [simgua.com](http://simgua.com))

**Modèles (à retard) autorégressif**  $\rightarrow y_t = \alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i \cdot x_{t-i} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \cdot y_{t-i} + \varepsilon_t$

une variable endogène datée d'un moment (période) donné est dépendante des variables endogènes datées des **moments (périodes) antérieure(s)**

**Exemple**: modèle de croissance de la population  $P_t = P_{t-i} \cdot e^{r \cdot i}$

$P_t$  – l'effectif d'une population au moment  $t$  ;  $i$  – un intervalle de temps ;  $r$  – le taux d'accroissement

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie)

12

12

### Exemple du modèle simple : « prédateurs – proies » (les équations de Lotka-Volterra)

Soit:  
 x – effectif des proies  
 y – effectif des prédateurs

$\alpha$  – taux de reproduction des proies (constant, indépendant de X)  
 $\beta$  – taux d'élimination des proies par les prédateurs

$\delta$  – taux de reproduction des prédateurs en fonction de la nourriture (proies mangées)  
 $\gamma$  – taux de mortalité de prédateurs (indépendant de Y)

**Graphe relationnel**

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) \cdot [\alpha - \beta y(t)] \\ \frac{dy(t)}{dt} = -y(t) \cdot [\gamma - \delta x(t)] \end{cases}$$

**Résultats de la simulation**

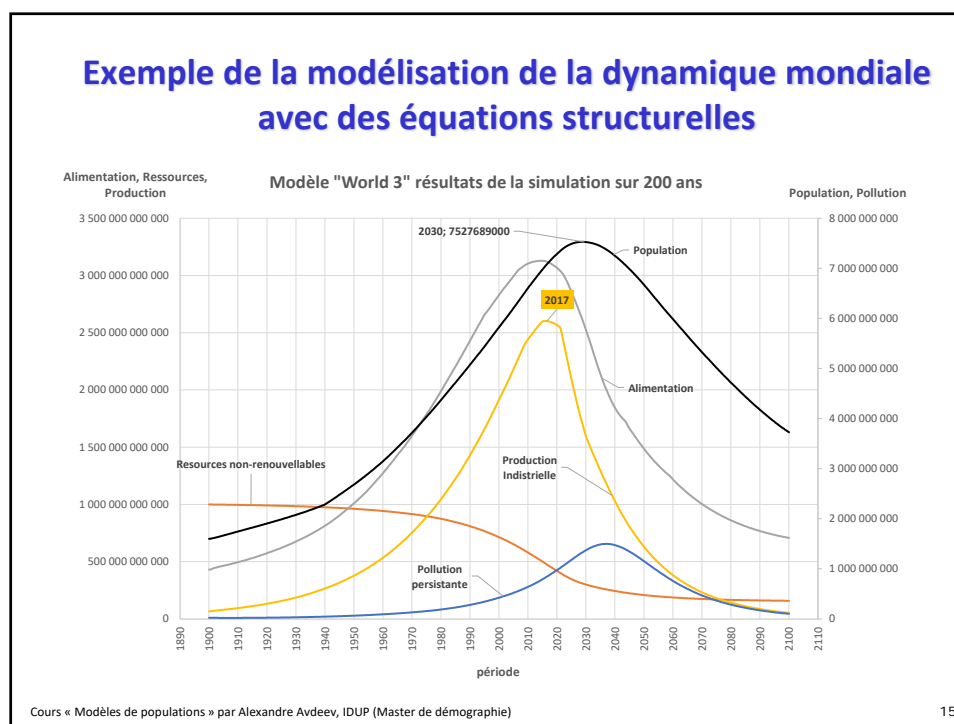
Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 13

13

### Exemple du modèle de la dynamique mondiale

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 14

14



15

## Exercice

Présenter sur un graph les relations entre les effectifs des célibataires, des mariés et des veufs sans distinction des sexes dans une populations fermée à la migration

- Spécifiez le modèle avec l'écriture symbolique (ex.g.  $C(t)$  – effectif des célibataires)
- Définissez les statistiques et les données dont vous avez besoin pour estimer les paramètres de votre modèle
- Listez les hypothèses sur les transitions entre différents états
- Quelles études faut-il envisager pour que ce modèle soit opérationnel

Développez le modèle pour deux sexes distincts en y introduisant les conditions intrinsèques de cohérence.

16