Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,

# Institut de démographie

*Cours d'analyse démographique* **(Master 1e année)** par Alexandre Avdeev,

**Chapitre 2**

## Diagramme de Lexis, types des taux et des quotients par âge

- Diagramme de W. Lexis : version d'origine et les modifications récentes
  - localisation des populations soumises au risque
  - localisation des événements démographique dans le temps
- Notion de temps dans l'histoire de vie
- Représentation graphique des parcours et des événements
- Type des taux et calculs des taux,
- Données nécessaires et leur localisation sur le diagramme de Lexis,
- Comparaison et relations entre les taux de divers types,
- Quotients, ou les probabilité d'une événement,
- Taux/quotients de première et de deuxième catégorie.

Lecture : Grazielle Cazelli et Jacques Vallin « Variation dans le temps des taux par âge » // *Démographie : analyse et synthèse*, vol. I La dynamique des populations. (sous la dir. De G.Cazelli, J.Vallin et G.Wunsch), Paris, INED, 2001, p.85-111

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 1

1

## Méthode graphique de repérer les événements démographiques et les populations correspondants dans le temps

Le diagramme de Wilhelm Lexis (1837-1914)

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 2

2

## À propos de quelques particularités des taux et quotients

- Le quotient est une proportion de personnes ayant eu l'expérience d'un événement dans la population exposée au risque *au début d'une période* déterminée : *plus la période est longue, plus la probabilité de l'événement est grande* **(s'il est question d'un événement fatal, i.e. décès, alors avec t→ ∞, q → 1).**
- Le quotient *est censé de mesurer la probabilité* dans le sens **de sa définition classique** (quand le nombre possible d'événements d'intérêt est strictement défini), or la probabilité a des propriétés (les probabilités indépendantes sont additives, les probabilités conditionnelles sont multiplicatives etc.), on attribue donc les propriétés de la probabilité aux quotients.
- En réalité, quotient n'est qu'une intégrale (*la primitive*) de la fonction de densité de la probabilité (dont le taux est une mesure de la tendance centrale avec une hypothèse sous-jacente que sa distribution est linéaire ou uniforme sur l'intervalle d'intégration). Par conséquent, le score d'un quotient dépend de l'amplitude de l'intervalle d'intégration. Donc ce n'est pas un indicateur robuste (en plus la vraie distribution de la densité est inconnue dans la plupart des cas) .
- Pour calculer un quotient on suppose :
  - ✓ que le temps soit discret (et en réalité ce n'est jamais le cas) ;
  - ✓ qu'une population soit homogène (une condition qui est très difficile à remplir)

*p.ex. l'indice de croissance de la population dans le temps discret représente de fait un quotient, mais cet indice est certainement influencé par **l'amortissement démographique** (changements dans les structures sous l'influence des événements démographiques ) et probablement – par **des compensations démographiques** (accumulations sous influences non démographiques) dans une population hétérogène (voir les pyramides démographiques irrégulières comme celle de la Russie en 1959)*

- Pour remplir les conditions de calcul des quotients et pour atténuer les problèmes de la hétérogénéité:
  - ✓ on choisie des ***populations (groupes) très homogènes*** (un groupe d'âge → quotients de mortalité; célibataires à un âge donné → quotient de primo-nuptialité, etc.)
  - ✓ on fait accourcir le période (*t*) qui rarement dépasse une année;
    **si *t* → *0*, quotient devient ≡ à un taux instantané**

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

3

3

## Taux/quotient de « seconde » catégorie : une simplification pour pallier le problème d'hétérogénéité

**On considère comme les taux de « première » catégorie** ceux qui rapportent le nombre d'événements démographiques ***E*** à une population réellement soumise au risque de cet événement $P_e$.
P.ex.: les mariages et les célibataires, les premières naissances et les femmes sans enfants etc.

Les calculs de ces taux ne sont pas toujours faciles à cause des autre événements qui entrent en concurrence avec les événements d'intérêt en les empêchant (p.ex. mariage et décès) ou en les perturbant (p.ex. mariage et migration).

**On calculs les taux de « seconde » catégorie** en rapportant le nombre d'événements démographiques l'effectif de la population soumise au risque de cet événement et non. Plus souvent à la population totale.

Les taux de « seconde » catégorie peuvent déformer fortement une image réelle des processus démographiques, puisque, par ex., ils sont chargés du passé (la natalité ou le mariage), mais ils sont souvent additifs, ce qui simplifie leur intégration dans le modèle additifs comme celui du bilan démographique.

$$\text{Taux} = \frac{\text{Nombre d'occurences durant une période T}}{\text{Nombre d'années vecues par la population exposée au risque et non}} = \frac{E}{P}$$

De fait, les taux de seconde catégorie sont plutôt les ratios

$$T_1 = \frac{E}{P_e} \qquad T_2 = \frac{E}{P}$$

Soit $T_1$ taux de première catégorie, $T_2$ taux de seconde catégorie
$E$ – nombre d'événements,
$P_e$ – population réellement exposée au risque d'événement $e$,
$P_{-e}$ – population non exposée au risque $e$,
$P$ – population totale exposée et non au risque $e$ → $P=P_e+P_{-e}$

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{P_e}{P} = \frac{E}{P_e} \cdot \frac{P_e}{P}$$

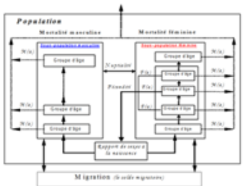
« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

4

4

## Le principe de correspondance ou la « règle d'or » de calcul des indicateurs démographiques: toujours rapporter les évènements à la population qui les a effectivement produits

- On a étudié les indicateurs du *mouvement général* de la population dont la construction est basée sur un concept de *la variation dans* ***le temps*** (croissance) et des composants de cette variation (bilan démographique)
- Ces indicateurs sont considérés comme étant « bruts » puisqu'ils sont calculés comme si la *population était un ensemble homogène* (réduit à un nombre) par rapport à l'événement d'intérêt, tandis qu'en réalité ce n'est pas vrai (***la moralité et la fécondité varient avec l'âge*** etc…)
- Pour calculer les indicateurs du mouvement d'une population, *il faut assumer que les sous-populations* (pour lesquelles on calcule ces indicateurs) *soient homogènes* relativement aux caractéristiques des événements qui sont caractérisés par ces indicateurs.
- On peut y rencontrer des problèmes puisque les données sur les ensembles d'évènements se réfèrent toujours à une période, tandis que les caractéristiques des populations se réfèrent à un moment.



Par ex. : taux de mortalité à l'âge x durant une période t :

$$m(x;t) = \frac{D(x;t)}{\overline{P}(x)\cdot t} \quad \text{avec} \quad \overline{P}(x) = \frac{P(x;t_0)+P(x;t_t)}{2}$$

Formellement, ici la condition de la homogénéité est respectée, quoi que P(x) soit un mélange de différentes générations ; et ***P(x;t₀)*** – population en début de période et ***P(x;tₜ)*** – celle à la fin de période soient liées par l'équation du bilan démographique

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 5

5

## Taux par âge

- On a vu que la structure par âge et par sexe était très variable (pyramidale)
- Notre expérience nous dit que la mortalité (probabilité de décéder) et la fécondité (probabilité d'accoucher un enfant) dépendant du sexe et varient avec l'âge

Les taux calculés pour les intervalles d'âge :

Soit $D^x_{0,t}$ le nombre de décès à l'intervalle d'âge « ***x*** » durant une période entre ***0*** et ***t***;
$B^x_{0,t}$ le nombre de naissance à l'âge « ***x*** » durant une période entre ***0*** et ***t***.

taux par âge — événement par âge

$$m^x_{0,t} = \frac{D^x_{0,t}}{t\cdot\overline{P}^x_{0,t}}$$ → **taux de mortalité pour âge « x » et période [0,t)** → $$D^x_{0,t} = m^x_{0,t}\cdot t\cdot\overline{P}^x_{0,t}$$

$$f^x_{0,t} = \frac{B^x_{0,t}}{t\cdot\overline{P}^x_{0,t}}$$ → **taux de fécondité pour âge « x » et période [0,t)** → $$B^x_{0,t} = f^x_{0,t}\cdot t\cdot\overline{P}^x_{0,t}$$

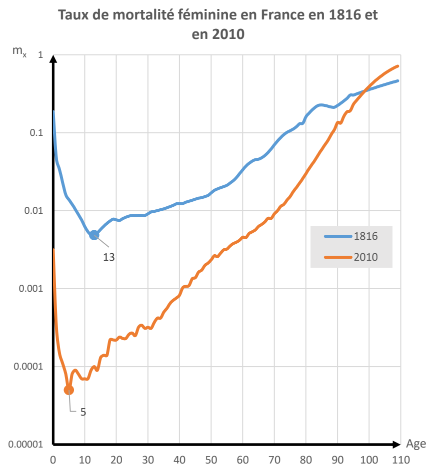
**Les sommes d'événements et, par conséquent, les taux bruts, dépendent des taux par âge**

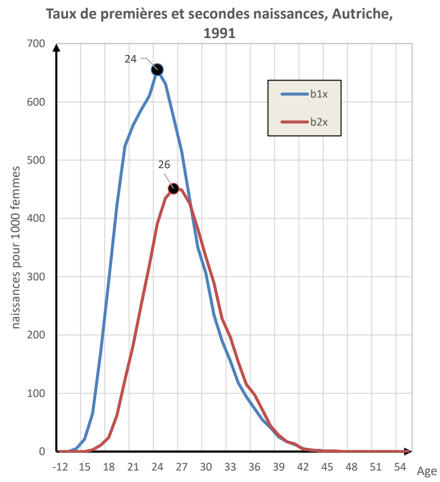
Etant donné que la durée de la période est une année (t = 1), nous pouvons nous passer du symbole *t* des formules

Alexandre Avdeev, cours « Analyse démographique », IDUP, master de démographie 6

6

## Taux ou quotient par âge (par groups d'âge)




Note: il est d'usage et autorisé par la tradition de présenter les répartitions des quotients sur le graphique en lignes continues, bien que du point de vue mathématique cela ne soit pas tout à fait convenable. Les quotients doivent plutôt être présentés comme un graphique en « marche d'escalier », ou comme un histogramme

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 7

7

## Notion de temps en analyse démographique: temps général et temps individuel

- Des qu'on passe d'une population globale, qui existe dans le temps, mais qui n'a pas d'âge à des sous-populations qui non seulement évoluent dans le temps, mais qui changent constamment leur âge, nous somme obligé à préciser les notions de temps et de l'âge pour pouvoir mieux identifier des données démographiques.
- Mesure de temps = l'échelle d'intervalles (un enfant à l'âge de 10 ans a 5 ans de plus et deux fois plus âgé qu'un enfant à l'âge de 5 ans, et dans 50 ans ?)
- Hormis *un temps « physique » ou « astronomique », général pour tous*, nous devons définir un *temps « individuel » qui est l'âge*, ou le temps écoulé depuis un événement constituant (e.g. la naissance) et un moment de temps de calendrier choisi pour l'intérêt d'étude (e.g. fin de l'année civile).
- *Les deux temps sont continus*, mais on pourrait les quantifier convenablement par catégories d'unité de temps, (année d'âge et année civile), pour associer les indicateurs relatifs aux mouvements de la population aux intervalles de temps, le plus souvent les « annualiser » .
- *Les deux temps sont **isomorphes*** puisque un événement constituant est défini dans le temps de calendrier, mais leurs scores annualisés ne coïncident qu'exceptionnellement (on vive, le plus souvent, deux années d'âge durant une année civile et une année d'âge s'étend normalement sur deux années civiles, sauf si la naissance a eu lieu juste au début l'année civile)

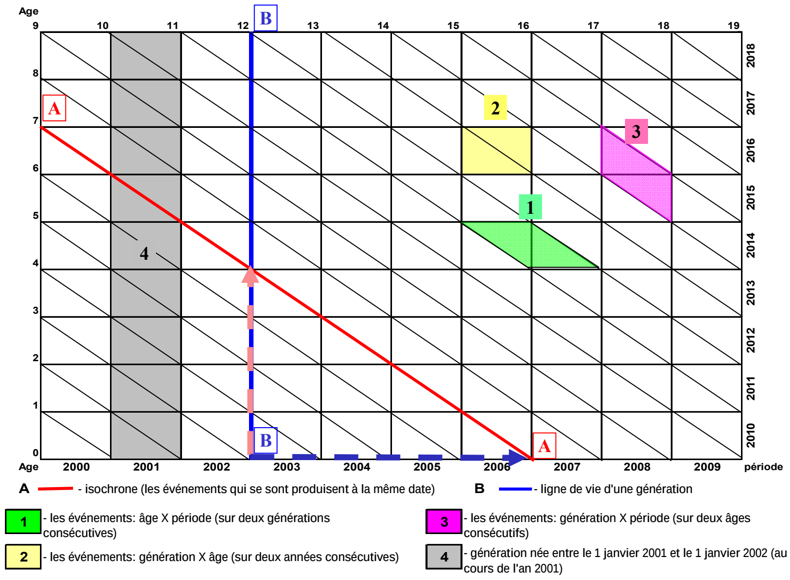
« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 8

8

## Les ensembles démographiques sur le diagramme de Lexis (en VO)

### l'axe horizontale = année de naissance; l'axe verticale = âge

Lexis W. (1875). *Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik*. Straßburg: Karl J. Trübner.

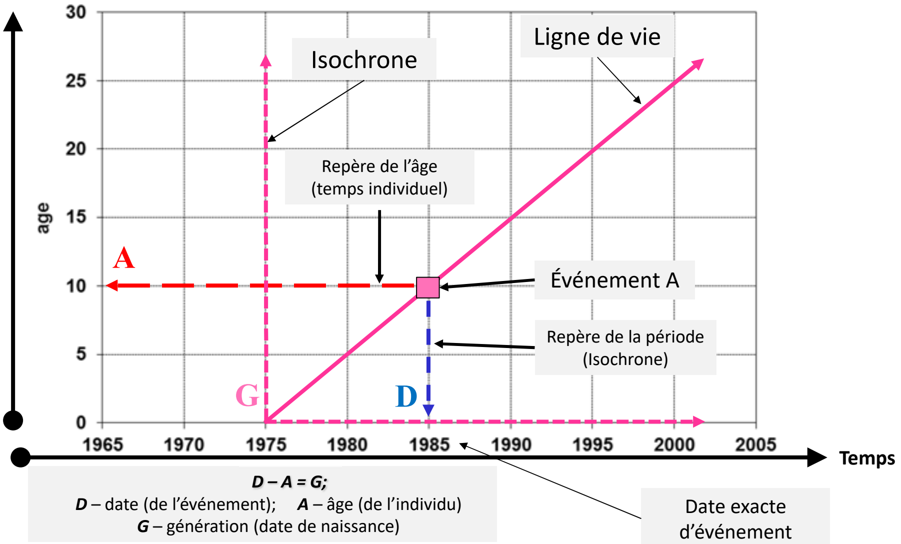



« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 9

9

## Le diagramme Lexis-Pressat (modification de R. Pressat):

### les isochrones et les lignes de vie sont inversées par rapport à la VO du diagramme



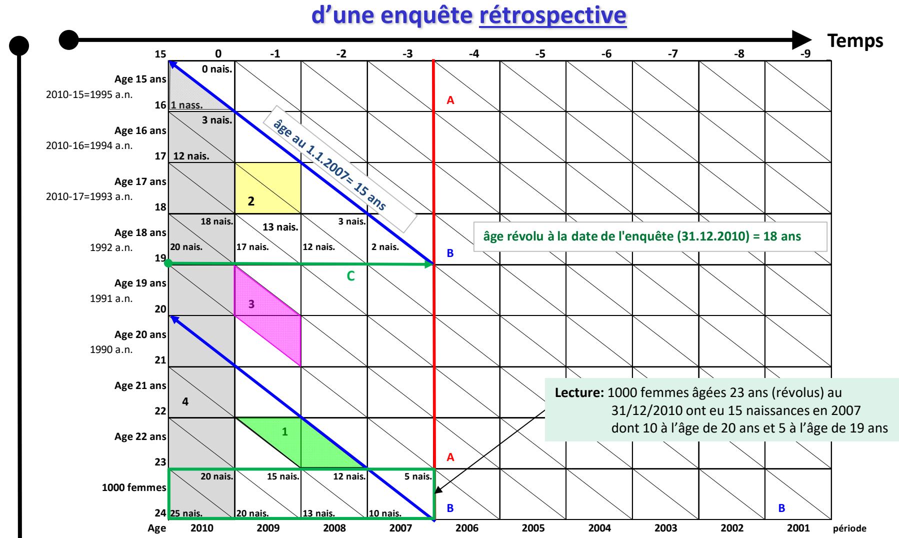

***D* – *A* = *G*;**
***D*** – date (de l'événement); ***A*** – âge (de l'individu)
***G*** – génération (date de naissance)

Déjà vu dans
Knapp, Georg (1874)- *Theorie des Bevölkerungswechsels*, Brunswick.
Becker, Karl(1874)- *Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu Stellende Anforderungen*, Berlin.

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 10

10

## Diagramme de Lexis appliqué à la tabulation « histoire de vie » des données d'une enquête rétrospective




A —— - Isochrone (regroupe les événements simultanés) B —— - ligne d'âge C —— - ligne de l'histoire de vie

1 -- naissances chez les femmes de même génération (1990 a.n.) à l'âge 22 ans (deux ans successifs)

3 - naissances durant l'an 2009 dans la génération de 1992. (deux années d'âge concécutives) 19-20 ans au 31.12.2010

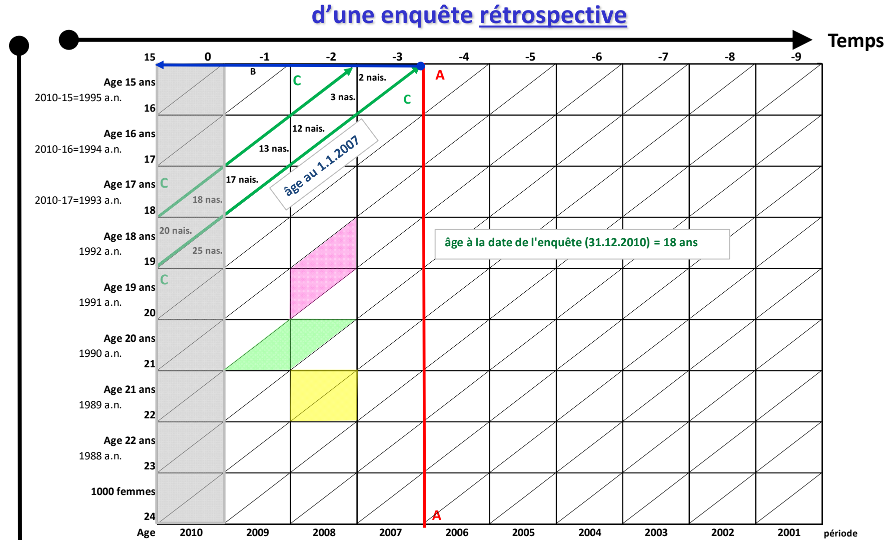
2 - naissances durant l'an 2009 chez les femmes âgées de 17 ans au 31.12.2010 (deux générations consécutives)

4 - nombre de naissances qui ont eu lieu entre le 1 janvier 2010 et le 1 janvier 2011 (durant l'an 2010)

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 11

11

## Diagramme de Lexis appliqué à la tabulation des données transposées d'une enquête rétrospective




A —— - Isochrone (regroupe les événements simultanés) B —— - ligne d'âge C —— - ligne de l'histoire de vie

1 -- naissances chez les femmes de même génération (1988 a.n.) à l'âge 20 ans (deux ans successifs)

3 - naissances durant l'an 2008 dans la génération de 1989. (deux années d'âge concécutives) 19-20 en 2010

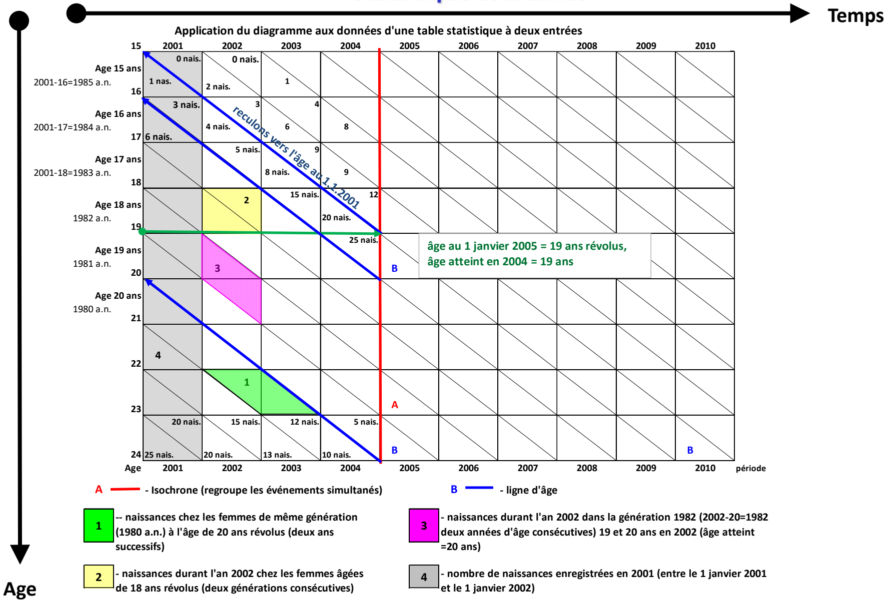
2 - naissances durant l'an 2008 chez les femmes âgées de 18 ans au 31.12.2010 (deux générations consécutives)

4 - nombre de naissances qui ont eu lieu entre le 31 décembre 2009 et le 1 janvier 2010 (durant l'an 2010)

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 12

12

## Diagramme de Lexis appliqué à la tabulation classique des données de la statistique courantes




« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 13

13

# 1. Repérage des populations

- Générations
- Age révolus
- Population moyenne

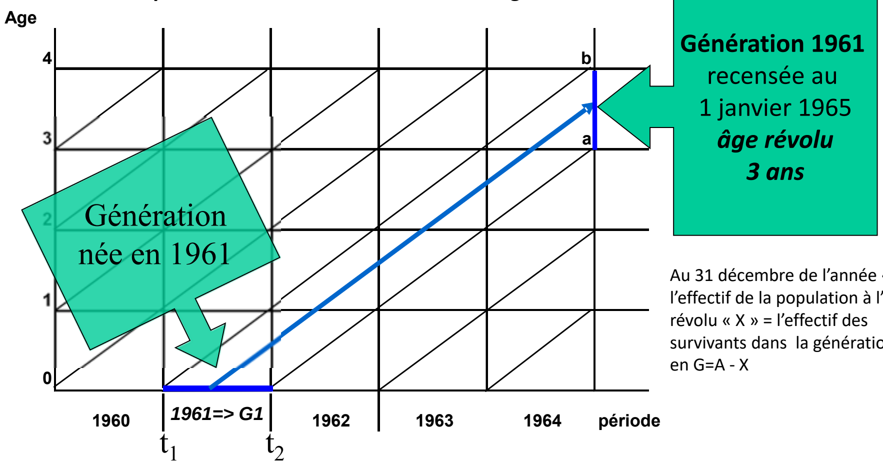
« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 14

14

## ***Génération :***

L'ensemble des individus qui sont nés entre les deux dates exactes. Autrement dit « la génération » est un ensemble des individus dont les dates de naissance (DN) sont conforme à l'inégalité : $t_1 < DN < t_2$

***Comme l'année civile est une unité usuelle de temps dans la démographie, on l'utilise le plus souvent comme le critère de la génération.***



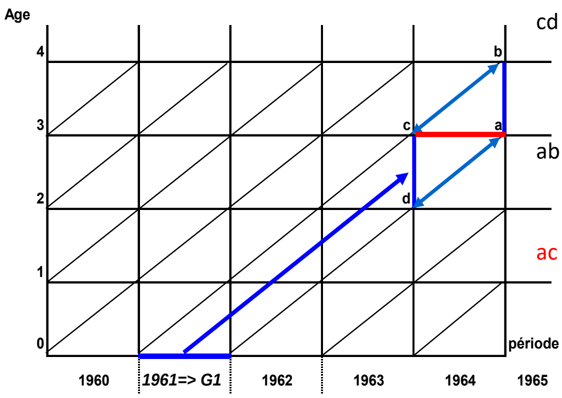

Au 31 décembre de l'année « A » l'effectif de la population à l'âge révolu « X » = l'effectif des survivants dans la génération née en G=A - X

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 15

15

## Exemple 1 : les survivants à l'âge exact

On s'intéresse à l'effet de cohorte et on cherche la population exposée dans la dimension génération-période une telle statistique n'existe nulle part, mais on peut l'estimer




**ac ≈ 0,5 x (ab + cd) x 1 →**

***→ le nombre d'années vécues par la génération G1 durant l'an 1964***

cd – ***ligne de date*** (de l'état) =
= l'effectif (survivants) de la génération G1 au 1 janvier 1964 (âge révolu)

ab – ***ligne de date*** =
= l'effectif de la génération G1 au 1 janvier 1965 **(31 décembre 1964)**

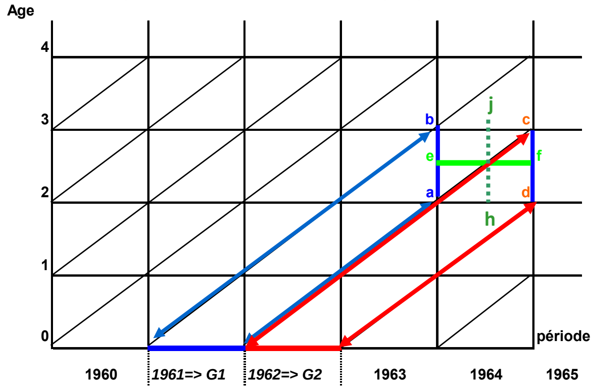
ac – ***ligne d'événement***
*(par ex. : anniversaire ou naissance) → pour une période)* =
= l'effectif moyen de la génération G1 pour l'an 1964 = population qui a atteint l'âge 3 ans en 1964
(cette ligne groupe des événements qui ont eu lieu durant une période déterminée, et non simultanément )

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 16

16

## Exemple 2 : Population dite « moyenne »

### ou plus exactement la population au milieu d'une période




**On s'intéresse à l'effet de l'âge (et période)**

**ab** – effectif de la génération G1 au 1 janvier 1964 (âge 2 ans révolus)

**cd** – effectif de la génération G2 au 1 janvier 1965 (âge 2 ans révolus)

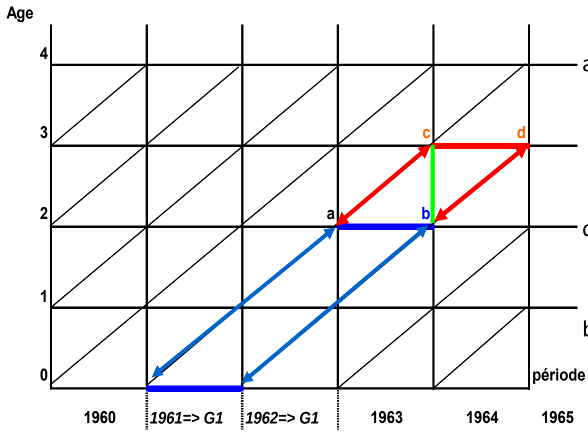
**ef ≈ jh ≈ 0,5 (ab + cd)** → *la population à l'âge atteint 2,5 en 1964 : <u>une partie de la G1 + une partie de la G2 (moitié , moitié)</u> ;*
*la population « moyenne » à l'âge 2 ans révolu en 1964 : <u>le pointillé vert foncé (jh)</u> ≡ un équivalent statistique de la population à l'âge 2 ans révolu au 30 juin 1964 ;*

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)  17

17

## Exemple 3 : Population du moment

### ou une population recensée




ab – l'effectif de la génération **G1**, qui a atteint l'âge de *2 ans* en 1963

(on dit: l'âge en différence des millésimes 1963 – 1961 =2)

cd – l'effectif de la génération **G1**, qui a atteint l'âge de *3 ans* en 1964

bc – l'effectif de la génération **G1** au 1 janvier 1964

**cb ≈ 0,5 (ab + cd)** → ***la population « moyenne » d'une génération à l'âge révolu de 2 ans au 1 janvier 1964***

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)  18

18

# 2. Repérage des événements démographiques

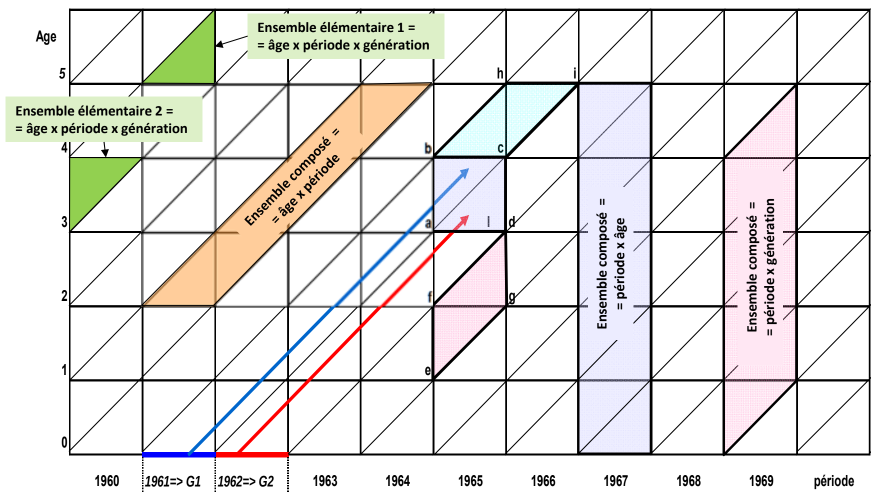
- Les ensembles d'événements démographiques (carré et parallélogrammes)
- Les ensembles élémentaires (triangles)

« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

19

19

## Localisation des événements démographiques sur le diagramme : les ensembles annuels et pluriannuels




Carré ABCD identifie les événements selon l'âge et période produits par une population qui a vécu dans cet âge et durant cette période (≡ Nombre d'Années Vécus, NAV)

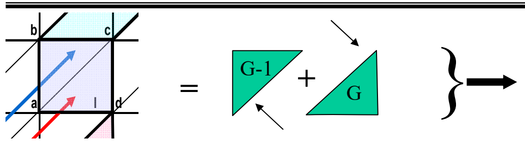
« Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

20

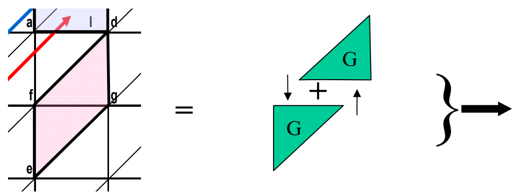
20

## Trois types de classement annuel des événements démographiques

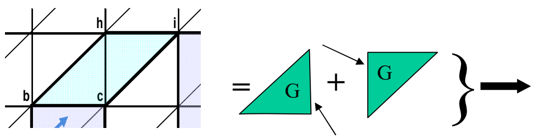
**Forme** | **Composition** | **Description**




**Type I:**
**(Age révolu) x (période)**




**Type II:**
**(Génération) x (période)**

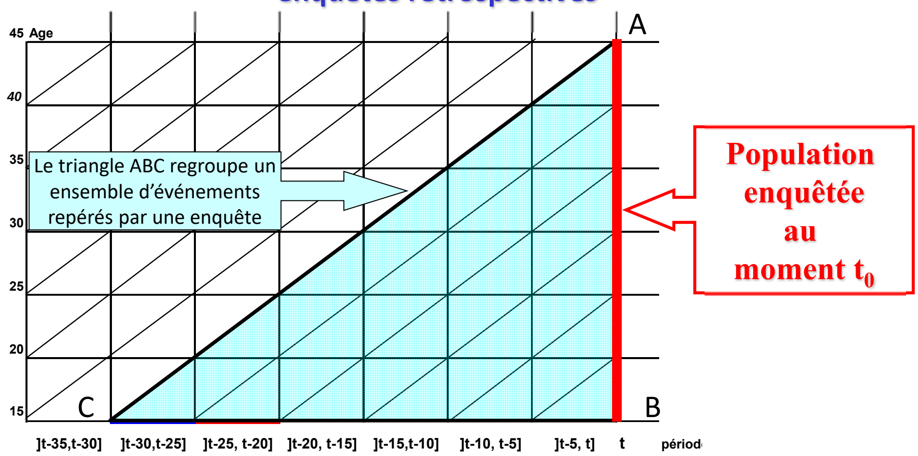



**Type III:**
**(Age révolu) x (génération)**



21

## Ensemble des événements démographiques dans les enquêtes rétrospectives




***Les défauts des enquêtes rétrospectives:***

a) dans la dimension longitudinale : les événements repérés sont souvent les événements sélecteurs

b) dans la dimension transversale : cf. a) plus la perte des informations relatives aux âges élevés



22

## Quelles informations faut-il chercher, quelles questions faut-il poser ?

- La meilleure solution est de poser les questions **sur les dates exactes de chaque événement** (jour, moi, année), en commençant par la date de naissance du répondant ou d'une personne d'intérêt.
- Ces questions pourraient être complétées pas des questions sur l'âge du répondant au moment de l'événement (surtout si ce dernier ne se souvient pas des dates, ou s'en trompe).
- Si les dates sont connues, il n'est pas inutile de créer telles variables de travail comme :
  - *L'âge au moment de l'événement* (en années révolue, ou éventuellement en mois) pour pouvoir préciser la durée exacte de la période de risque
  - *L'âge atteint dans l'année* (ou l'âge à la fin de l'année) **en différence des millésimes** (l'année d'événement moins l'année de naissance) qui utile pour l'analyse longitudinale (des générations).
  - *Une durée d'intervalles en unité de temps plus petites*, i.e. en mois, en semaines, en jours. *(Si votre logiciel d'analyse statistique permet de travailler avec les variables au format de « date », vous pouvez en négliger)*

## Qu'est-ce qu'on peut faire avec les informations sur les dates des événements ?

- Estimer l'effectif de la population dans le passé (pour une période antérieure d'une enquête exhaustive ou sur échantillon): cette procédure est nécessaire pour balancer les résultats de deux recensements successifs).
- Estimer le niveau et la structure par âge de la mortalité pour une période antérieure d'une enquête (**attention !** Il faut considérer telles estimations avec beaucoup de précaution).
- Estimer le niveau et l'évolution de la mortalité infantile. (Généralement, telles estimations de la mortalité infantile sont plus exactes que celles de la mortalité aux âges adulte, et surtout que celles aux âges élevés et des personnes seules)
- Estimer la fécondité pour une période antérieure d'une enquête avec des méthodes relativement simples comme P/F, e.g. , ainsi que avec celles plus sophistiquées basées sur l'analyse des biographies individuelles.





# 3. Calculs des taux et des quotients à l'aide du diagramme de Lexis-Pressat

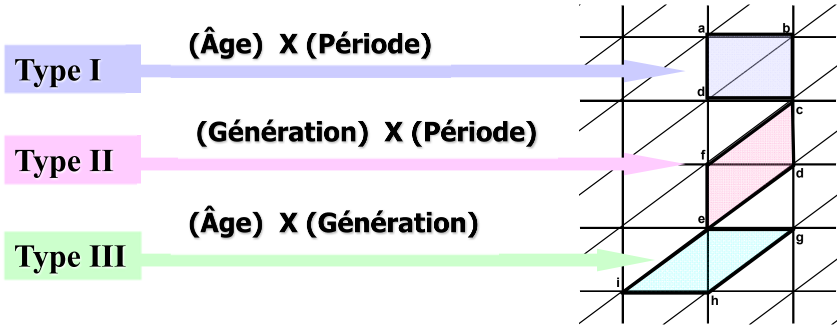
- Calculs des taux de différents types
- Conversion des taux
- Calculs des quotients de différents types
- Conversion des quotients
- Taux/quotients de « première » et de « seconde » catégorie

**Rappel**

## Taux en démographie

$$\text{Taux} = \frac{\text{Nombre d'occurences}^{1)}}{\text{Nombre de personnes} - \text{années d'exposition au risque}}$$

### Trois types de classement des événements démographiques




[1] Occurrence : « Chaque apparition explicite d'un élément dans un énoncé. » © Hachette Livre, 1998

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP)

25

25

## Taux par âge de type I (âge-période)*

***Exemple: mortalité***

Ce taux (de mortalité par âge) mesure la mortalité moyenne pour une période et dans un intervalle l'âge (ce dernier inclut deux ou plusieurs générations consécutives)

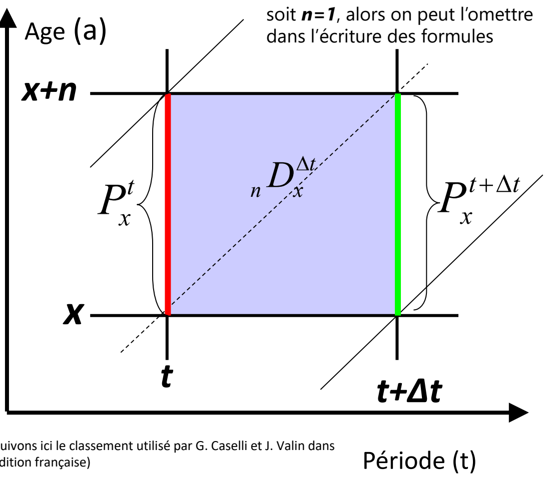
$${}_n m_x^I = \frac{{}_n D_x^{\Delta t}}{0{,}5 \cdot (P_x^t + P_x^{t+\Delta t}) \cdot \Delta t}$$

soit ***n=1***, alors on peut l'omettre dans l'écriture des formules

${}_n D_x^{\Delta t}$ – nombre de décès à l'âge « ***x*** » révolu (entre âge exact ***x*** et ***x+n***) durant une période « ***t*** » (entre moment ***t*** et ***t+Δt***)

$P_x^t$ – population à l'âge « ***x*** » révolu (entre âge exact ***x*** et ***x+n***) au moment « ***t*** ».

$P_x^{t+\Delta t}$ – population à l'âge « ***a*** » révolu (entre âge exact ***a*** et ***a+1***) au moment « ***t+1*** ».




* - cette numérotation (ordre) de types de taux est arbitraire, nous suivons ici le classement utilisé par G. Caselli et J. Valin dans *Démographie: analyse et synthèse*, 2001, vol.1, ch.6 (p.103 de l'édition française)

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP)

26

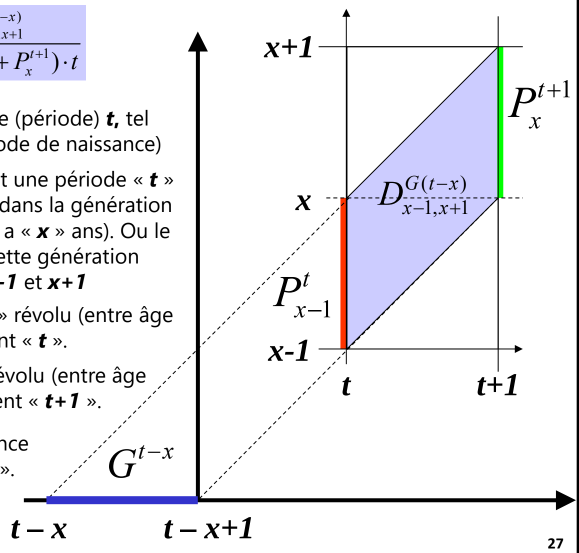
26

## Taux de type II (dit « perspectif » ou *période-génération*)

Ce taux mesure la mortalité moyenne d'une ou plusieurs générations consécutives dans un intervalle de temps

$$m^{II}_{G(t-x)} = \frac{D^{G(t-x)}_{x-1,x+1}}{0,5\cdot(P^t_{x-1}+P^{t+1}_x)\cdot t}$$

Exemple: mortalité




Soit – ***x*** âge atteint[1] dans l'année (période) ***t***, tel que ***t – x = g*** (année/période de naissance)

$D^{G(t-x)}_{x-1,x+1}$ – nombre de décès pendant une période « ***t*** » (entre moment ***t*** et ***t+1***) dans la génération née entre ***t-x*** et ***t-x+1*** (il a « ***x*** » ans). Ou le nombre de décès dans cette génération entre deux âges exacts ***x-1*** et ***x+1***

$P^t_{x-1}$ – population à l'âge « ***x-1*** » révolu (entre âge exact ***x-1*** et ***x***) au moment « ***t*** ».

$P^{t+1}_x$ – population à l'âge « ***x*** » révolu (entre âge exact ***x*** et ***x+1***) au moment « ***t+1*** ».

$G^{t-x}$ – une génération de naissance durant la période « ***t – 1*** ».

***Note***

[1] On parle aussi de l'âge à la fin de l'année (période)

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 27

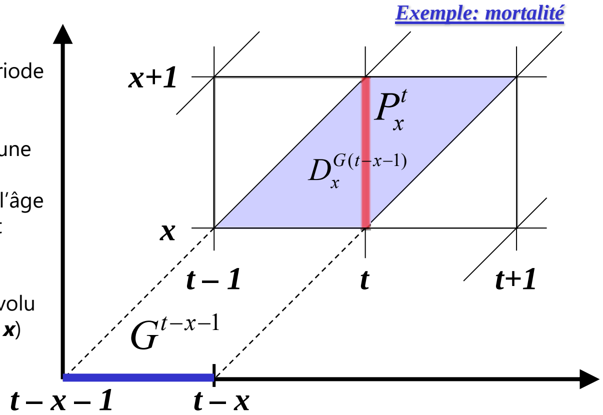
27

## Taux de type III (*âge-génération*)

bon pour quantifier la densité moyenne de la probabilité d'un événement entre deux âges exacts dans une ou plusieurs générations (relevant du temps individuel)

$$m^{III}_x = \frac{D^{G(t-x-1)}_x}{P^t_x}$$

Exemple: mortalité




Soit – âge atteint dans l'année (période) ***t***, tel que ***t – x – 1 = g*** (année/période de naissance)

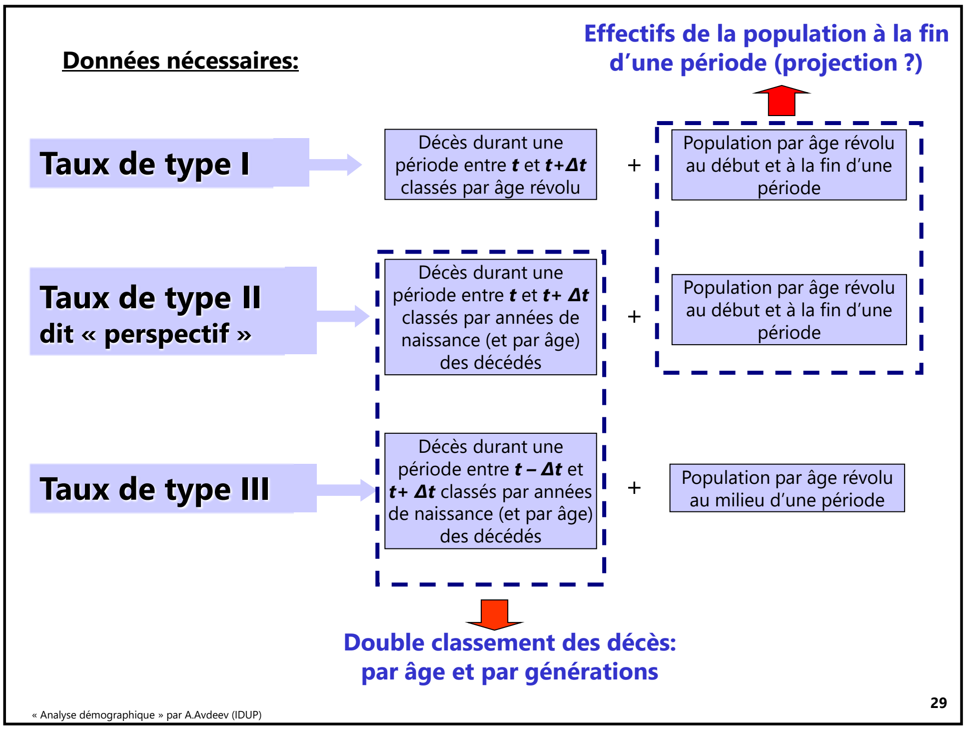
$D^{G(t-x-1)}_x$ – nombre de décès dans une génération née entre le moment ***t-x-1*** et ***t-x***) à l'âge ***x*** ans révolus (entre ***x*** et ***x+1***)

$P^t_x$ – population à l'âge ***x*** révolu (entre âge exact ***x-1*** et ***x***) au moment ***t*** .

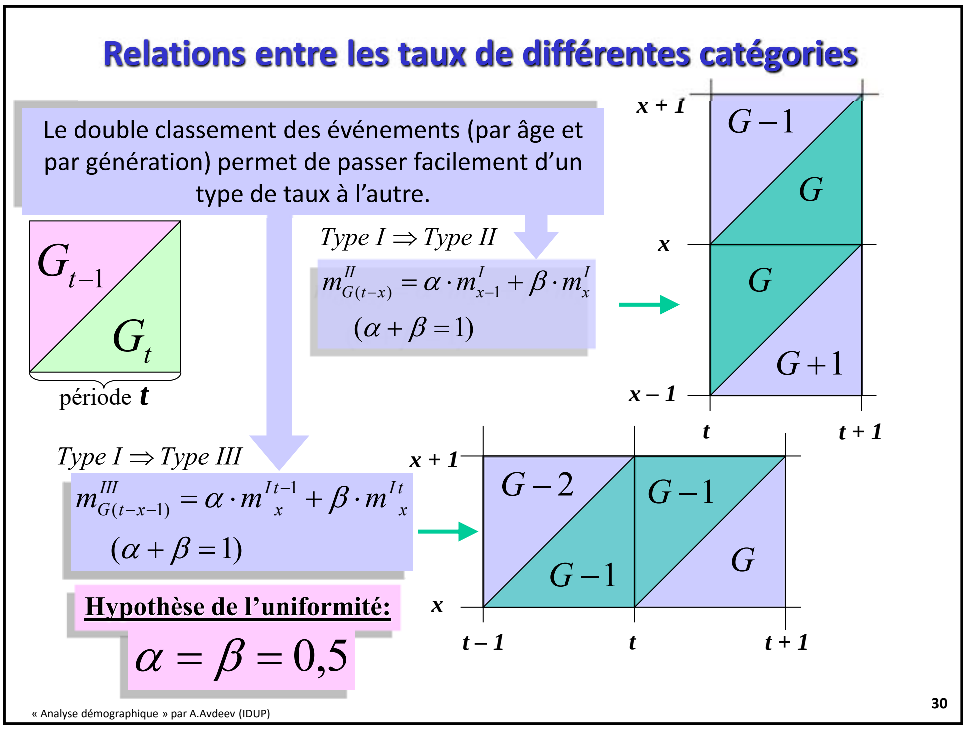
***Ce taux mesure s'applique aux tables démographiques (mortalité, fécondité etc.) sous l'hypothèse de la stationnarité***

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 28

28


Données nécessaires:
Effectifs de la population à la fin d'une période (projection ?)
Taux de type I
Décès durant une période entre t et t+Δt classés par âge révolu
+
Population par âge révolu au début et à la fin d'une période
Taux de type II dit « perspectif »
Décès durant une période entre t et t+ Δt classés par années de naissance (et par âge) des décédés
+
Population par âge révolu au début et à la fin d'une période
Taux de type III
Décès durant une période entre t – Δt et t+ Δt classés par années de naissance (et par âge) des décédés
+
Population par âge révolu au milieu d'une période
Double classement des décès: par âge et par générations
« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP)
29

29


Relations entre les taux de différentes catégories
Le double classement des événements (par âge et par génération) permet de passer facilement d'un type de taux à l'autre.
$G_{t-1}$
$G_t$
période $t$
$Type\ I \Rightarrow Type\ II$
$m^{II}_{G(t-x)} = \alpha \cdot m^{I}_{x-1} + \beta \cdot m^{I}_{x}$
$(\alpha + \beta = 1)$
x + 1
x
x – 1
$G-1$
$G$
$G$
$G+1$
t
t + 1
$Type\ I \Rightarrow Type\ III$
$m^{III}_{G(t-x-1)} = \alpha \cdot m^{I\,t-1}_{x} + \beta \cdot m^{I\,t}_{x}$
$(\alpha + \beta = 1)$
x + 1
x
$G-2$
$G-1$
$G-1$
$G$
t – 1
t
t + 1
Hypothèse de l'uniformité:
$\alpha = \beta = 0{,}5$
« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP)
30

30

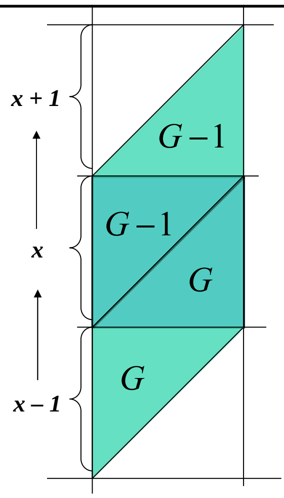
## Relations entre les taux de diverses catégories (suite)

*Type II ⇒ Type I*

$$m_x^I = \alpha \cdot m_x^{II} + \beta \cdot m_{x+1}^{II}$$

ou

$x$ – l'âge atteint dans l'année

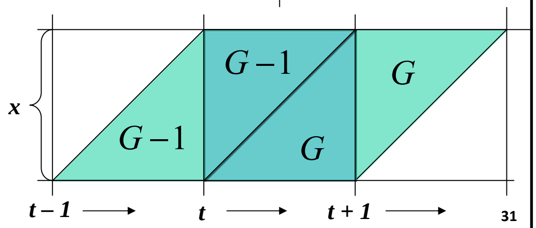



*Type III ⇒ Type I*

$$m_x^{I\,t} = \alpha \cdot m_x^{III\,t} + \beta \cdot m_x^{III\,t+1}$$

ou

$x$ – l'âge révolu



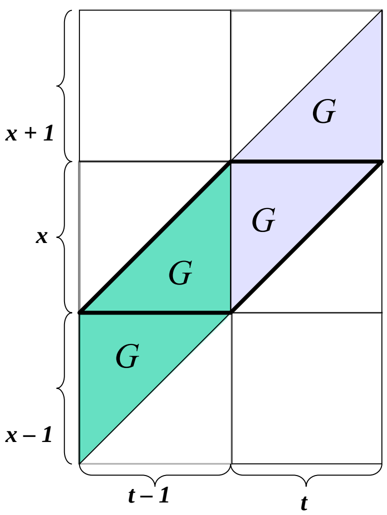

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP)

31

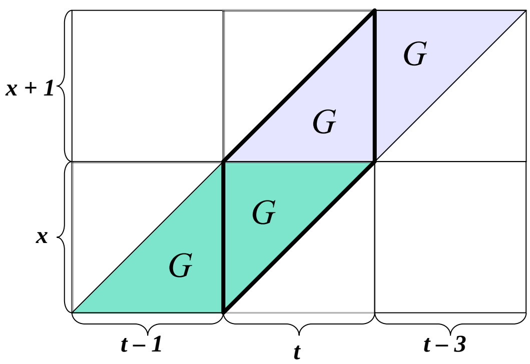
31

## Relations entre les taux de diverses catégories (suite)

*Type II ⇒ Type III*




*Type III ⇒ Type II*




« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP)

32

32

## 1. Quotient ou la probabilité d'un événement pour une personne appartenants à une catégorie

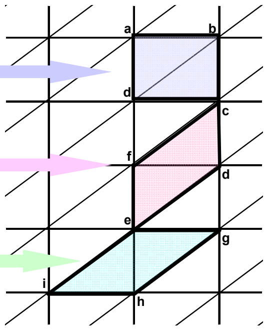
$$_N Q_X = \frac{\text{Nombre d'occurences à l'âge X}}{\text{Population soumise au risque au début d'une période N}}$$

## 2. Trois types de classement des événements démographiques

**Type I** — (Âge) X (Période)

**Type II** — (Génération) X (Période)

**Type III** — (Âge) X (Génération)




« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 33

33

## Quotient « perspectif » (pour une génération et une période) associé à l'âge atteint dans l'année

$$q^{G(t-x)}_{x-1,x+1} = \frac{D^{G(t-x)}_{x-1,x+1}}{P^t_{x-1}}$$

Ce quotient mesure la probabilité de mourir durant un intervalle de temps (une année, e.g.) pour une génération (i.e. avant ou après X[e] anniversaire)

$D^{G(t-x)}_{x-1,x+1}$ – nombre de décès pendant une période « ***t*** » (entre moment ***t*** et ***t+1***) dans la génération née en ***t-x*** (différence des millésimes = il a « ***x*** » ans).

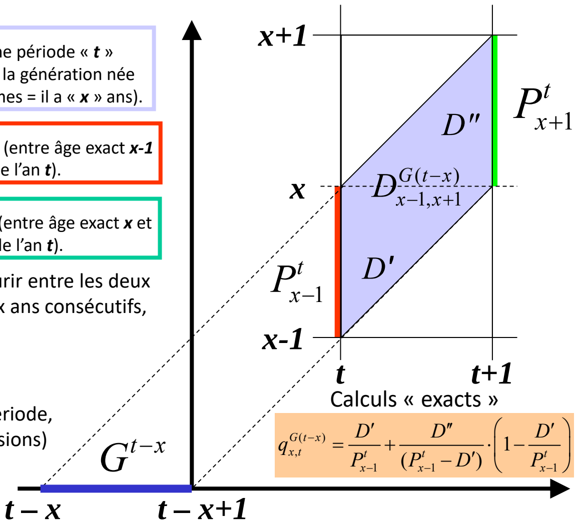
$P^t_{x-1}$ – population à l'âge « ***x-1*** » révolu (entre âge exact ***x-1*** et ***x***) au moment « ***t*** » (début de l'an ***t***).

$P^t_{x+1}$ – population à l'âge « ***x*** » révolu (entre âge exact ***x*** et ***x+1***) au moment « ***t+1*** » (fin de l'an ***t***).

On parle aussi de la probabilité de mourir entre les deux date (le 1 janvier et le 1 janvier de deux ans consécutifs, e.g.) pour une génération.

Ainsi $p^{G(t-x)}_x = 1 - q^{G(t-x)}_x$

la probabilité de survivre durant une période, qu'on utilise pour les projections (prévisions) démographiques




Calculs « exacts »

$$q^{G(t-x)}_{x,t} = \frac{D'}{P^t_{x-1}} + \frac{D''}{(P^t_{x-1} - D')} \cdot \left(1 - \frac{D'}{P^t_{x-1}}\right)$$

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 34

34

## Quotient pour une génération entre deux anniversaires

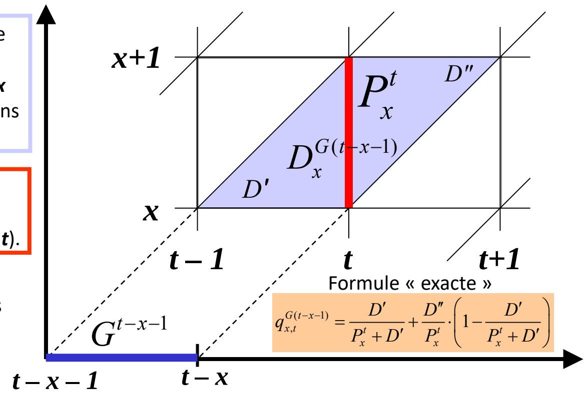
$$q_x^{G(t-x-1)} = \frac{D_x^{G(t-x-1)}}{P_x^t + 0,5 \cdot D_x^{G(t-x-1)}}$$

Ce quotient mesure la probabilité d'un événement (e.g. un décès) pour une génération durant un intervalle d'âge

$D_x^{G(t-x-1)}$ – nombre de décès dans une génération née entre sur l'intervalle entre ***t-x-1*** et ***t-x*** (destinée avoir l'âge « ***x*** » ans révolus au début de l'an ***t***)

$P_x^t$ – population à l'âge « ***x*** » révolu (entre âge exact ***x-1*** et ***x***) au moment « ***t*** » (au début de l'an ***t***).

Puisque la statistique des anniversaires n'existe nulle part, on ne dispose jamais de l'effectif de population à l'âge exact. Il est nécessaire donc de l'estimer.




Cette estimation pourrait se faire à partir d'une hypothèse que les décès sont distribués uniformément dans l'intervalle d'âge (D'=D'' → hypothèse d'uniformité). Une telle hypothèse n'est acceptable que ci les intervalles sont suffisamment courts. Sinon il faudra recourir aux hypothèses plus complexes (e.g. normalité de risque etc.), ou appliquer une formule « exacte », si les décès sont classés par génération et par âge (double classement)

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 35

35

## Une probabilité de mourir associée à l'âge révolu et un intervalle de temps (âge x période)

Si nous supposons que la probabilité de mourir dans un triangle élémentaire ne change pas beaucoup durant deux années successives (***hypothèse de stationnarité***), on pourra donc en déduire que :

$$q_x = q'_x + q''_x - q'_x \cdot q''_x$$

On voit par ailleurs que sous cette hypothèse :

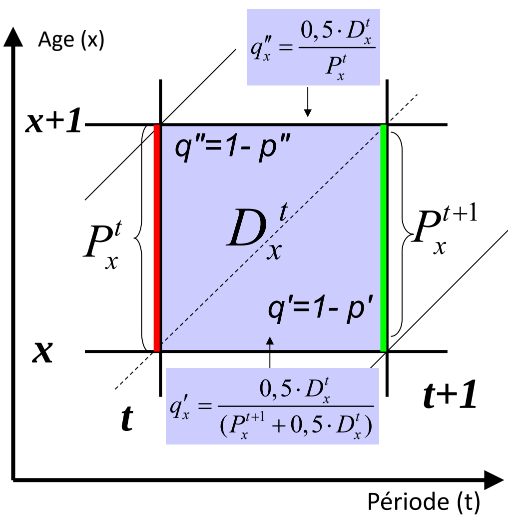
q' ≈ ½ du quotient (de mortalité) de la génération $P_x^t$ à l'âge *x* ou ≈ ½ du quotient (de mortalité) de la génération $P_x^t$ pour l'année *t* ;

et

q'' ≈ ½ du quotient (de mortalité) de la génération $P_x^{t+1}$ pour l'année *t ;*

Sachant que la valeur du produit (q' x q'') est très faible, on peut le négliger et accepter la formule suivante :

$$q_x = q'_x + q''_x$$



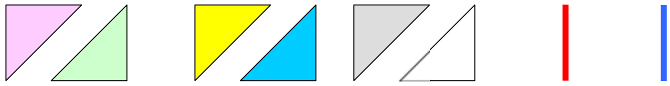

*On recourt à des quotients de ce type (âge-période), si on s'intéresse à des situations très particulières (e.g. la mortalité infantile), ou si on étudie les périodes pluriannuelles*

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 36

36

## Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux:

*une étude de l'effet d'âge (74 ans) et de période (an 1994)*



**À effectuer la transcription des données sur le diagramme de Lexis (version Pressat ou/et une autre)**

| Age | Tableau 76 INSEE 1993 | | 1994 | | 1995 | | Tableau 6 INSEE Population (1.1.xx) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | G-1 | G | G-1 | G | G-1 | G | 1994 | 1995 |
| 69 | 3081 | 3300 | 3184 | 3205 | 3197 | 3279 | 224448 | 231630 |
| 70 | 3321 | 3600 | 3208 | 3240 | 3291 | 3457 | 219548 | 218205 |
| 71 | 3557 | 3619 | 3344 | 3498 | 3349 | 3425 | 213348 | 212922 |
| 72 | 3961 | 3801 | 3648 | 3719 | 3596 | 3613 | 213184 | 206391 |
| 73 | 2858 | 4183 | 4142 | 3878 | 3954 | 3925 | 210506 | 205693 |
| **74** | 2386 | 2318 | **2889** | **4275** | 4084 | 4280 | ***121312*** | 202140 |
| 75 | 2118 | 2393 | 2417 | 2275 | 3095 | 4646 | ***100716*** | 116196 |
| 76 | 2058 | 2163 | 2238 | 2438 | 2456 | 2376 | ***84490*** | 95863 |
| 77 | 2222 | 2259 | 2005 | 2137 | 2235 | 2667 | ***74641*** | 80091 |
| 78 | 4030 | 3326 | 2326 | 2242 | 2238 | 2376 | ***87657*** | 70442 |
| 79 | 4305 | 4294 | 4108 | 3249 | 2322 | 2345 | ***120679*** | 82035 |
| 80 | 4492 | 4560 | 4325 | 4171 | 4321 | 3444 | 113403 | 112397 |
| 81 | 4256 | 4738 | 4465 | 4400 | 4313 | 4308 | 104048 | 104663 |

Exemple de : Caselli G. et J.Vallin « Du repérage des événements dans le temps au diagramme de Lexis et au calculs des taux » Dans: Caselli G., J.Vallin et G.Wunsch *Démographie. Analyse et synthèse*. Vol.I « La dynamique des populations ». INED, Paris, 2001, p.102-109

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP)

37

37

## Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite)

| G-1 | G | Age |
|---|---|---|
| 1924 | 1925 | 69 |
| 1923 | 1924 | 70 |
| 1922 | 1923 | 71 |
| 1921 | 1922 | 72 |
| 1920 | 1921 | 73 |
| **1919** | **1920** | **74** |
| **1918** | **1919** | **75** |
| 1917 | 1918 | 76 |
| 1916 | 1917 | 77 |
| 1915 | 1916 | 78 |
| 1914 | 1915 | 79 |
| 1913 | 1914 | 80 |
| 1912 | 1913 | 81 |

G = 1994 – âge

on observe six générations :

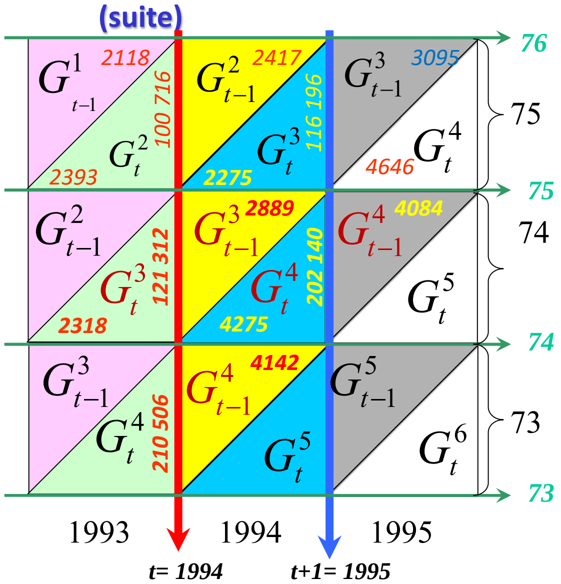
$G^1$ 1917 = 1992-75,

$G^2$ 1918 = 1993-75,

**$G^3$ 1919 = 1994-75,**

**$G^4$ 1920 = 1994-74,**

$G^5$, $G^6$



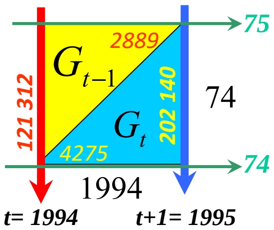

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP)

38

38

## Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

**Type I:**
**année. . . . . 1994**
**âge révolu. . . 74**




**G = 1994 – 74 = 1920**
Dans cette G 'âge de 74 est atteint en 1994 (t)

**G-1 = 1920 – 1 = 1919**
Dans cette G 'âge de 74 est atteint en 1993 (t– 1)

L'axe verticale: la variation ↘, facteur 1,48
L'axe horizontale: la variation ↗, facteur 1,67

$$m_{74}^{I} = \frac{(D_{G-1}^{1994} + D_{G}^{1994})}{0{,}5\cdot(P_{74}^{1994} + P_{74}^{1995})} = \frac{2\times(2889+4275)}{(121312+202140)} = 0{,}04430$$

| Age | 1993 | | 1994 | | 1995 | | Population | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | G-1 | G | G-1 | G | G-1 | G | 1994 | 1995 |
| 74 | 2386 | 2318 | 2889 | 4275 | 4084 | 4280 | 121312 | 202140 |
| 75 | 2118 | 2393 | 2417 | 2275 | 3095 | 4646 | 100716 | 116196 |
| 76 | 2058 | 2163 | 2238 | 2438 | 2456 | 2376 | 84490 | 95863 |
| 77 | 2222 | 2259 | 2005 | 2137 | 2235 | 2667 | 74641 | 80091 |

Source: « Traité » Vol. I, Ch.6. p.104

Taux type I = 44‰

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 39

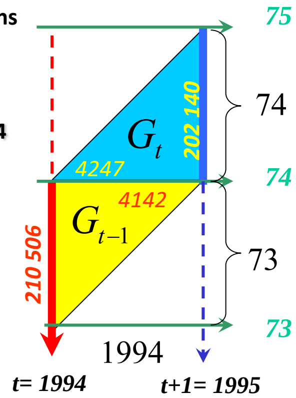
39

## Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

**Type II :** **âge 74 ans en 1994 comporte deux générations par année de naissance, 1920 et 1919**

**Année. . . . . . . . 1994**
**Génération. . . . 1920**

**âge atteint en 1994 = 74**




$$m_{G1920}^{II1994} = \frac{(D_{73}^{94,G-1} + D_{74}^{94,G})}{0{,}5\cdot(P_{73}^{1994} + P_{74}^{1995})} =$$

$$= \frac{2\times(4142+4275)}{(210506+202140)} = 0{,}04080$$

| Age | 1993 | | 1994 | | Population | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | G-1 | G | G-1 | G | 1994 | 1995 |
| 72 | 3961 | 3801 | 3648 | 3719 | 213184 | 206391 |
| 73 | 2858 | 4183 | 4142 | 3878 | 210506 | 205693 |
| 74 | 2386 | 2318 | 2889 | 4275 | 121312 | 202140 |
| 75 | 2118 | 2393 | 2417 | 2275 | 100716 | 116196 |

Taux type II' = 41‰ (inférieur de celui de type I de ~10%)

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 40

40

## Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

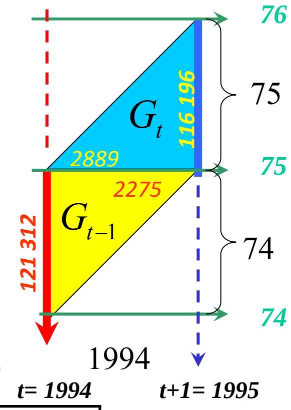
**Type II:**

**Année………1994 ; Génération…1919**

**l'âge vécu en 1994 = 74 ; l'âge atteint en 1994 = 75**

$$m_{G1919}^{II1994} = \frac{(D_{74}^{94,G-1} + D_{75}^{94,G})}{0{,}5 \cdot (P_{74}^{1994} + P_{75}^{1995})} = $$

$$= \frac{2 \times (2889 + 2275)}{(121312 + 116196)} = 0{,}04348$$




**Notez:**

121 312 – 2 275 – 2 889 = 116 148 ≠ 116 196 (effet de la migration?)

| Age | 1993 | | 1994 | | Population début année | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **G-1** | **G** | **G-1** | **G** | **1994** | **1995** |
| 72 | 3961 | 3801 | 3648 | 3719 | 213184 | 206391 |
| 73 | 2858 | 4183 | 4142 | 3878 | 210506 | 205693 |
| 74 | 2386 | 2318 | ***2889*** | 4275 | ***121312*** | 202140 |
| 75 | 2118 | 2393 | 2417 | ***2275*** | 100716 | ***116196*** |

Taux type II″ = 43‰

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 41

41

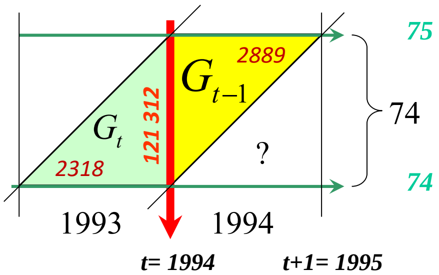
## Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

**Type III (1e génération) :**

**âge 74 ans en 1994 est vécu par deux générations pour lesquelles cette âge est entendu sur deux ans de calendrier**

**Année. . . . . . 1993-94**

**Génération . . . .1919**




$$m_{74}^{III\ G-1919} = \frac{(D_{74}^{1993G} + D_{74}^{1994G})}{P_{74}^{1994}} = \frac{2318 + 2889}{121312} = 0{,}04292$$

| Age | 1993 | | 1994 | | Population | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **G-1** | **G** | **G-1** | **G** | **1994** | **1995** |
| 72 | 3961 | 3801 | 3648 | 3719 | 213184 | 206391 |
| 73 | 2858 | 4183 | 4142 | 3878 | 210506 | 205693 |
| 74 | 2386 | ***2318*** | ***2889*** | 4275 | ***121312*** | 202140 |
| 75 | 2118 | 2393 | 2417 | 2275 | 100716 | 116196 |

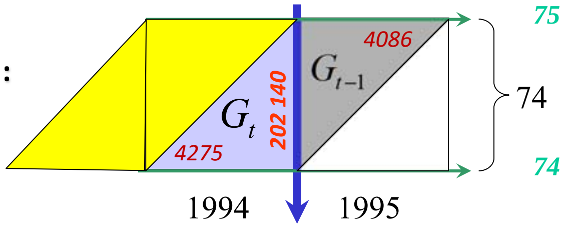
Taux type III′ = 43‰

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 42

42

## Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

**Type III (2e génération) :**
**Année. . . . . . 1994-95**
**Génération…1920**




$$m_{74}^{III\ G-1920}=\frac{(D_{74}^{1994G}+D_{74}^{1995G-1})}{P_{74}^{1995}}=\frac{4275+4084}{202140}=0,04135$$

| Age | 1993 | | 1994 | | 1995 | | Population | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | G-1 | G | G-1 | G | G-1 | G | 1994 | 1995 |
| 74 | 2386 | 2318 | 2889 | ***4275*** | ***4084*** | 4280 | 121312 | ***202140*** |
| 75 | 2118 | 2393 | 2417 | 2275 | 3095 | 4646 | 100716 | 116196 |
| 76 | 2058 | 2163 | 2238 | 2438 | 2456 | 2376 | 84490 | 95863 |
| 77 | 2222 | 2259 | 2005 | 2137 | 2235 | 2667 | 74641 | 80091 |

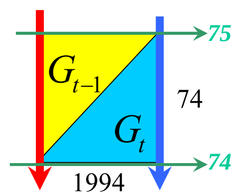
Taux type III" = 41‰

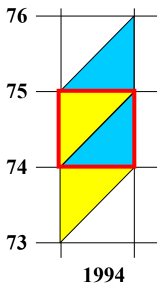
« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 43

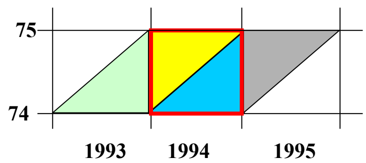
43

## Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

**Type I: année = 1994; âge = 74**




$$m_{74}^{I}=\frac{(D_{G-1}^{1994}+D_{G}^{1994})}{0,5\cdot(P_{74}^{1994}+P_{74}^{1995})}=$$
$$=0,04430$$

$$m_{74}^{I(1994)}=\frac{m_{G1920}^{II1994}+m_{G1919}^{II1994}}{2}=$$
$$=\frac{0,04080+0,04348}{2}=$$
$$=0,04214$$

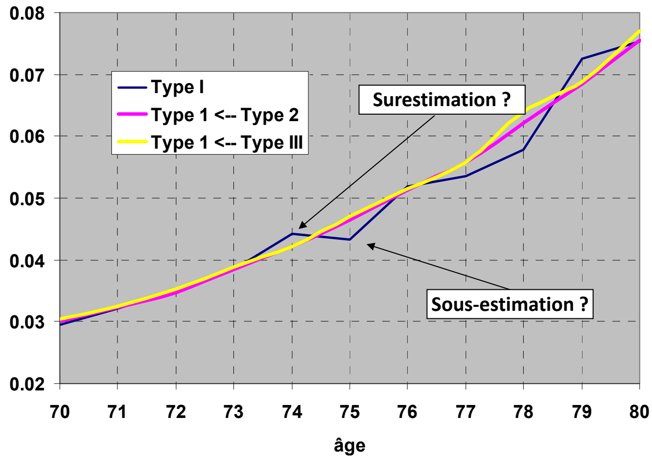
$$m_{74}^{I(1994)}=\frac{m_{74}^{III93-94}+m_{G74}^{III94-95}}{2}=$$
$$=\frac{0,04292+0,04135}{2}=$$
$$=0,04214$$

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 44

44

## Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite)

Comparaison des taux de type I calculés différemment



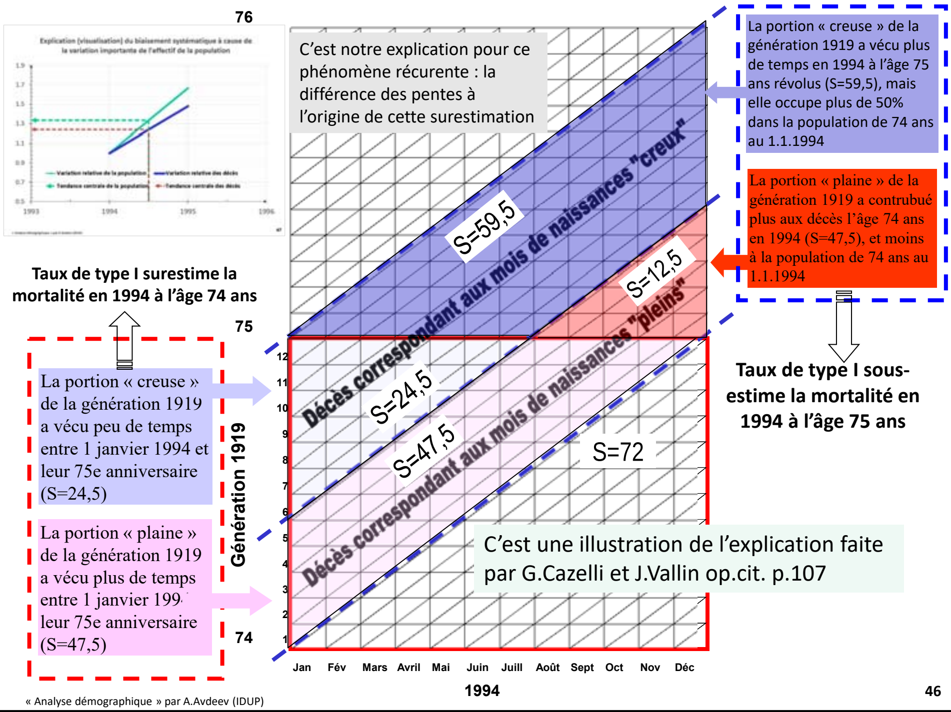

On observe une anomalie inexplicable sur une courbe de mortalité basée sur les taux « en carré » calculés directement à partir des données

Cette anomalie sera récurrente, si on calcule les taux de la même manière pour les années précédentes.

On peut donc faire une fausse conclusion que le risque de décès dans des certaines générations est plus fort (moins fort)

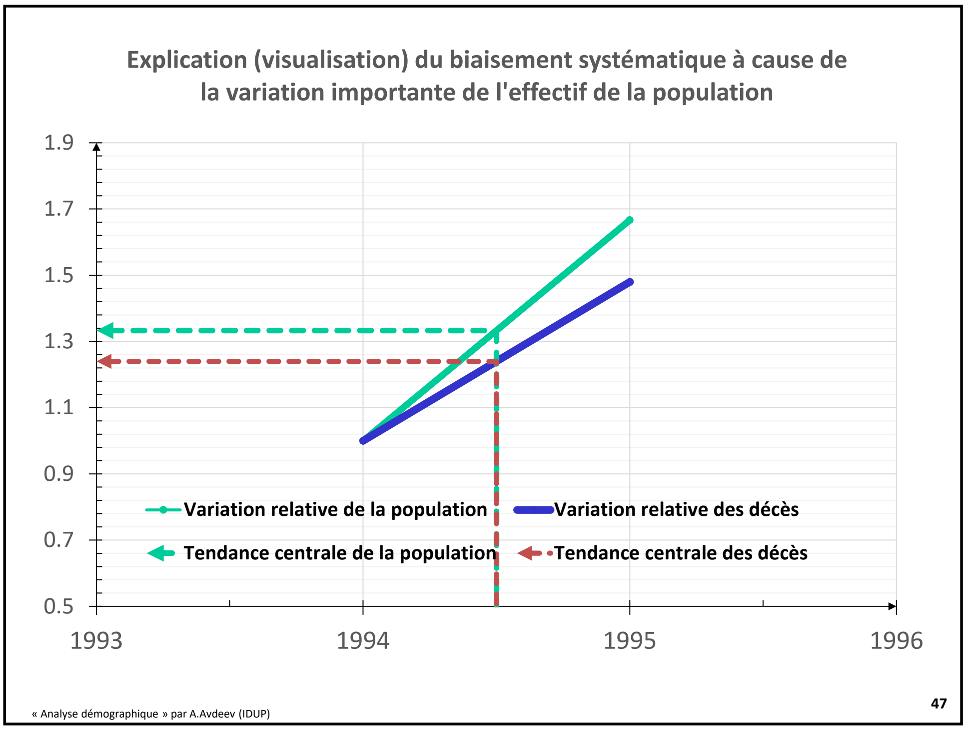
« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 45

45




« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 46

46


Explication (visualisation) du biaisement systématique à cause de la variation importante de l'effectif de la population
1.9
1.7
1.5
1.3
1.1
0.9
0.7
0.5
1993
1994
1995
1996
Variation relative de la population
Variation relative des décès
Tendance centrale de la population
Tendance centrale des décès
« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP)
47

47