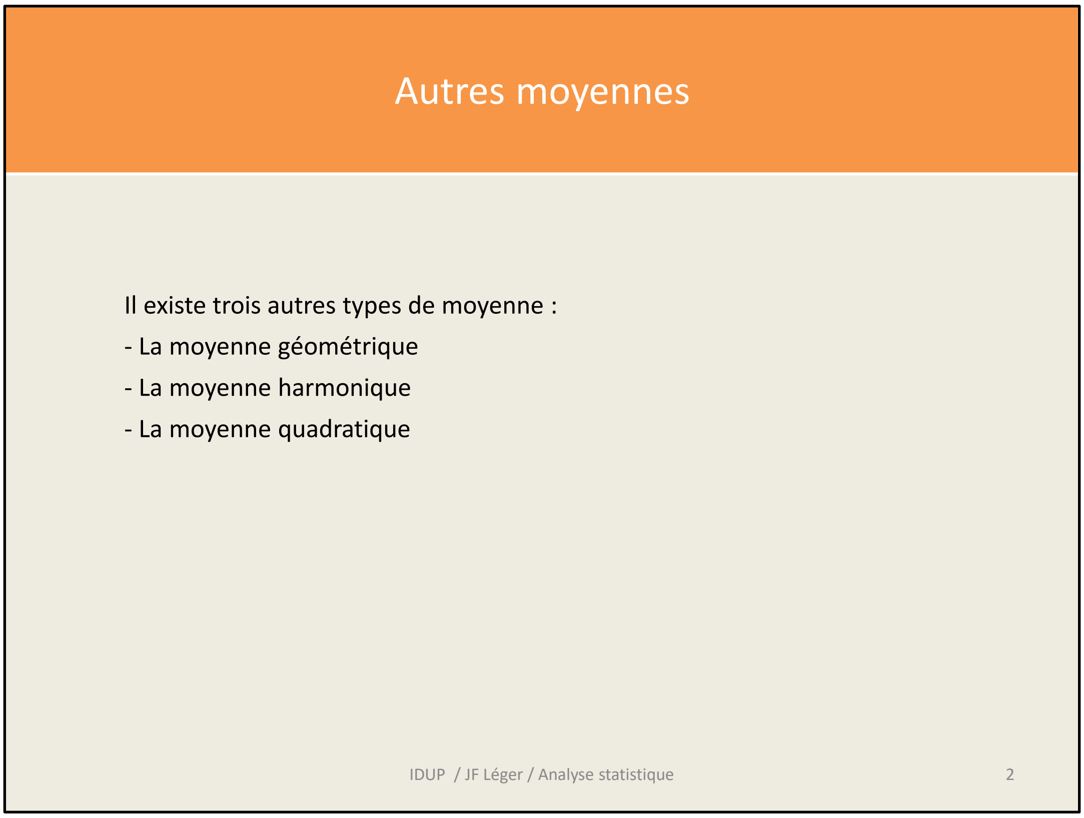
M1/Analyse statistique

3. LES CARACTÉRISTIQUES DE TENDANCE CENTRALE

Partie 2_Moyennes harmonique et quadratique



Il existe trois autres types de moyenne :

(1) La moyenne géométrique (utilisée dans le cadre de l'analyse des séries chronologiques) ;

(2) La moyenne harmonique, utilisée par exemple dans le cas du calcul de vitesses moyennes ;

(3) La moyenne quadratique, dont on se sert pour déterminer le côté moyen de plusieurs surfaces.

Ces deux dernières moyennes peuvent être appréhendées par une réflexion fondée sur le bon sens, comme on va le voir dans les diapos suivantes.

La moyenne géométrique sera abordée dans le cadre de l'analyse des séries chronologiques.

La moyenne harmonique

Calcul de la vitesse moyenne pour un A/R entre Paris et Etretat (notons la distance entre ces deux villes : d) :

Aller : v_A = 100 km/h

Retour : v_R = 50 km/h

$$(1)\ v_A = \frac{d}{t_A}\ et\ v_B = \frac{d}{t_B} \qquad (3)\ comme\ t = \frac{d}{v}$$

$$(2)\ v_{A/R} = \frac{2\times d}{t_A + t_B} \qquad (4)\ alors\ v_{A/R} = \frac{2\times d}{\frac{d}{v_A}+\frac{d}{v_B}} = \frac{2d}{d\times\left(\frac{1}{v_A}+\frac{1}{v_B}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_A}+\frac{1}{v_B}}$$

$$v_{A/R} = \frac{2}{\frac{1}{100}+\frac{1}{50}} = 66{,}6\ km/h$$

IDUP / JF Léger / Analyse statistique 3

La vitesse moyenne de l'aller/retour entre Paris et Etretat n'est pas de 75 km/h, mais de 66,6 km/h. Ici, le calcul de la moyenne arithmétique n'est pas pertinent.

Cela est lié au type d'indicateur dont on cherche à faire la moyenne : il s'agit d'un rapport entre une distance (exprimée en km) et une durée (exprimée en heure).

Ici, il faut calculer une moyenne harmonique, que l'on note de manière générale H.

La moyenne harmonique simple de n nombres réels non nuls est le réel noté H qui correspond à <u>l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses</u> :

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

La moyenne harmonique pondérée de n nombres réels non nuls, affectés respectivement des coefficients n_i tels que la somme des n_i (pour i variant de 1 à r) = n, est le réel noté H qui correspond à l'inverse de la moyenne arithmétique pondérée de leurs inverses :

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i}{x_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i}{x_i}}$$

Mais cet exemple montre qu'avec un peu de bon sens, on peut calculer une moyenne harmonique sans en connaître la formule.

La moyenne quadratique

Soit un appartement composé de deux pièces de surface respective S_A (de côté c_a) et S_B (de côté c_B). On cherche à déterminer le côté moyen de chacune de ces pièces.

On commence par calculer la surface totale, puis la surface moyenne de chaque pièce, dont on déduit le côté moyen.

Soit $S_A = 9\ m^2$ et $S_B = 12\ m^2$

$S_A + S_B = 21\ m^2$

$$(1)\ \bar{S} = \frac{9+12}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5\ m^2 \ et : \bar{c} = \sqrt{10{,}5} = 3{,}2\ m$$

On peut aussi écrire :

$$(2)\ \bar{c} = \sqrt{\frac{9+12}{2}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{9}\right)^2 + \left(\sqrt{12}\right)^2}{2}}$$

IDUP / JF Léger / Analyse statistique 4

(1) Le côté moyen d'une pièce est la racine carrée de la surface de cette pièce.

Dans le cas présent, pour calculer le côté moyen de ces deux pièces, on a déterminé la racine carrée de la surface moyenne de chacune de ces pièces.

Ce calcul correspond à une *moyenne quadratique* .

La moyenne quadratique simple de n nombre réels (notée Q) est la racine carrée de la moyenne arithmétique du carré de ces n valeurs :

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

(2) Dans l'exemple présenté, la moyenne quadratique des côtés, qui sert à calculer le côté moyen de ces différentes pièces, est la moyenne des carrés des valeurs prises par les côtés de chacune des pièces.

La moyenne quadratique pondérée de r nombre réels affectés respectivement des coefficients n_i tels que la somme des n_i est égale à n, correspond à la racine carrée de la moyenne arithmétique pondérée des carrés de ces r valeurs :

$$Q = \sqrt{\frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots + n_r x_r^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i^2}$$