IDUP / janvier 21

M1 : Analyse statistique (JF Léger)

4. Caractéristiques de dispersion

Exercice 2. La dispersion des salaires au sein de la fonction publique

CORRIGE

1) À partir des données du tableau 1, qui présente les salaires moyens des agents de la fonction publique selon leur statut et leur niveau hiérarchique, calculez le salaire moyen de l'ensemble des agents **titulaires** de la fonction publique, ainsi que la variance et l'écart-type des salaires des agents titulaires de la fonction publique selon la catégorie hiérarchique. Commentez brièvement vos résultats.

Corrigé

Le salaire moyen des agents titulaires de la fonction publique est indiqué dans le tableau 1. Il est donc inutile de chercher à le calculer ! Il s'élève à 2 526 € net en 2010.

Cette information est capitale pour répondre aux questions suivantes.

La variance mesure la dispersion moyenne autour du salaire moyen. Elle correspond à la moyenne des carrés des écarts à la valeur moyenne. Dans le cas présent, on s'intéresse à la dispersion des salaires selon la catégorie hiérarchique. La variance peut donc être formulée de la manière suivante :

$$Var(s) = \left[f_A \times \left(\bar{s}_A - \bar{\bar{s}}\right)^2\right] + \left[f_B \times \left(\bar{s}_B - \bar{\bar{s}}\right)^2\right] + \left[f_C \times \left(\bar{s}_C - \bar{\bar{s}}\right)^2\right] + \left[f_{Inc} \times \left(\bar{s}_{Inc} - \bar{\bar{s}}\right)^2\right]$$

Le tableau 1 indique les salaires moyens de chacune des catégories hiérarchiques (s_A, s_B, s_C, s_{Inc}), ainsi que la part, pour 100 fonctionnaires titulaires, de personnels de catégorie A (f_A) et B (f_B). En revanche, on ne connaît pas la part de personnels des catégories C (f_C) et « Inconnue » (f_{Inc}).

On peut néanmoins les calculer. En effet, le salaire moyen de l'ensemble des fonctionnaires titulaires est la moyenne des salaires de chaque catégorie hiérarchique pondérée par le poids de chacune d'elles :

$$\bar{\bar{s}} = \left(f_A \times \bar{s}_A\right) + \left(f_B \times \bar{s}_B\right) + \left(f_C \times \bar{s}_C\right) + \left(f_{Inc} \times \bar{s}_{Inc}\right)$$

On sait également que :

$$f_A + f_B + f_C + f_{Inc} = 1$$

En conséquence, on peut écrire que :

$$f_{Inc} = 1 - \left(f_A + f_B + f_C\right) = 1 - f_A - f_B - f_C$$

Il suffit de remplacer f_{Inc} par cette expression dans la formule qui permet de déterminer le salaire moyen des fonctionnaires titulaires à partir de ceux de chaque catégorie hiérarchique pour déterminer f_C :

$$\bar{\bar{s}} = \left(f_A \times \bar{s}_A\right) + \left(f_B \times \bar{s}_B\right) + \left(f_C \times \bar{s}_C\right) + \left[\left(1 - f_A - f_B - f_C\right) \times \bar{s}_{Inc}\right]$$
$$\bar{\bar{s}} - \left(f_A \times \bar{s}_A\right) - \left(f_B \times \bar{s}_B\right) = \left(f_C \times \bar{s}_C\right) + \bar{s}_{Inc} - \left(f_A \times \bar{s}_{Inc}\right) - \left(f_B \times \bar{s}_{Inc}\right) - \left(f_C \times \bar{s}_{Inc}\right)$$
$$\bar{\bar{s}} - \left(f_A \times \bar{s}_A\right) - \left(f_B \times \bar{s}_B\right) - \bar{s}_{Inc} + \left(f_A \times \bar{s}_{Inc}\right) + \left(f_B \times \bar{s}_{Inc}\right) = \left(f_C \times \bar{s}_C\right) - \left(f_C \times \bar{s}_{Inc}\right)$$
$$\bar{\bar{s}} - \bar{s}_{Inc} + f_A \times \left(\bar{s}_{Inc} - \bar{s}_A\right) + f_B \times \left(\bar{s}_{Inc} - \bar{s}_B\right) = f_C \times \left(\bar{s}_C - \bar{s}_{Inc}\right)$$
$$f_C = \frac{\bar{\bar{s}} - \bar{s}_{Inc} + f_A \times \left(\bar{s}_{Inc} - \bar{s}_A\right) + f_B \times \left(\bar{s}_{Inc} - \bar{s}_B\right)}{\left(\bar{s}_C - \bar{s}_{Inc}\right)}$$
$$f_C = \frac{2\,526 - 1\,940 + 0{,}636 \times \left(1\,940 - 2\,758\right) + 0{,}196 \times \left(1\,940 - 2\,334\right)}{\left(1\,869 - 1\,940\right)} = 0{,}162$$

On en déduit f_{Inc} :

$$f_{Inc} = 1 - \left(0{,}636 + 0{,}196 + 0{,}162\right) = 1 - 0{,}994 = 0{,}006$$

On peut donc maintenant calculer la variance et l'écart-type :

$$Var\,(s) = \left[0{,}636 \times \left(2\,758 - 2\,526\right)^2\right] + \left[0{,}196 \times \left(2\,334 - 2\,526\right)^2\right] + \left[0{,}162 \times \left(1\,869 - 2\,526\right)^2\right] + \left[0{,}006 \times \left(1\,940 - 2\,526\right)^2\right]$$
$$Var\,(s) = 34\,232 + 7\,225 + 69\,927 + 2\,060 = 113\,445 \text{ €}^2$$
$$\sigma_S = \sqrt{Var\,(s)} = \sqrt{113\,445} = 337 \text{ €}$$

La variance est de 113 445 €^{2}, ce qui n'est pas très facile à commenter. L'écart-type a une signification plus concrète : la plupart des salaires sont compris dans une « fourchette » qui s'étire de part et d'autre du salaire moyen de $\pm$ 337 €. La dispersion des salaires dans la fonction publique est donc très faible : le coefficient de variation autour du salaire moyen est de 13 % :

$$CV = \frac{\sigma_S}{\bar{\bar{s}}} = \frac{337}{2\,526} = 0{,}133 = 13{,}3\,\%$$

Remarque : on pouvait approcher ce résultat sans effectuer le calcul précis des parts respectives de catégories C et « Inconnue ». En effet, les salaires moyens de ces deux catégories sont très proches : l'écart est de 71 € pour un salaire de l'ordre de 1 900 €, soit un écart relatif de 4 %. Dans le cas présent, compte tenu de l'homogénéité des salaires moyens, on pouvait regrouper ces deux catégories en une seule catégorie et adopter comme salaire moyen la moyenne des salaires moyens de ces deux catégories, soit 1 905 €.

Avec :

$$f_{C+Inc} = 1 - f_A - f_B = 1 - 0{,}636 - 0{,}196 = 0{,}168$$
$$\bar{s}_{C+Inc} = \frac{1\,869 + 1\,940}{2} = 1\,905 \text{ €}$$

Les valeurs de la variance, de l'écart-type et du coefficient de variation sont de :

$$Var\,(s) = \left[0{,}636 \times \left(2\,758 - 2\,526\right)^2\right] + \left[0{,}196 \times \left(2\,334 - 2\,526\right)^2\right] + \left[0{,}168 \times \left(1\,905 - 2\,526\right)^2\right]$$
$$Var\,(s) = 34\,232 + 7\,225 + 64\,892 = 106\,349 \text{ €}^2$$
$$\sigma_S = \sqrt{Var\,(s)} = \sqrt{106\,349} = 326 \text{ €}$$
$$CV = \frac{\sigma_S}{\bar{\bar{s}}} = \frac{326}{2\,526} = 0{,}129 = 12{,}9\,\%$$

2) Si l'on travaillait à partir d'un fichier détaillé (série détaillée des salaires des agents titulaires de la fonction publique), quel effet cela aurait-il sur la valeur :

- du salaire moyen ;
- de la variance et de l'écart-type ?

Justifiez en quelques lignes, sans faire le moindre calcul, votre réponse.

Corrigé

A partir d'un fichier détaillé, le calcul du salaire moyen serait exactement le même. En effet, le salaire moyen est le rapport entre la somme des salaires (ou masse salariale – *MS*) et le nombre de salariés. Le produit du salaire moyen des catégories A et du nombre de personnels de catégories A permet de déterminer la masse salariale consacrée à la rémunération de cette catégorie de personnels (MS_A). Si l'on ajoute à cette masse salariale celle des autres catégories hiérarchiques, on obtient la masse salariale totale. Et si l'on divise celle-ci par le nombre de salariés, on retrouve le salaire moyen de l'ensemble des fonctionnaires. C'est exactement ce qui a été fait à partir des données du tableau 1.

Masse salariale de la fonction publique :

$$MS = MS_A + MS_B + MS_C + MS_{Inc}$$
$$MS = \left(n_A \times \bar{s}_A\right) + \left(n_B \times \bar{s}_B\right) + \left(n_C \times \bar{s}_C\right) + \left(n_{Inc} \times \bar{s}_{Inc}\right)$$

Salaire moyen dans la fonction publique

$$\bar{\bar{s}} = \frac{MS}{n_A + n_B + n_C + n_{Inc}} = \frac{\left(n_A \times \bar{s}_A\right) + \left(n_B \times \bar{s}_B\right) + \left(n_C \times \bar{s}_C\right) + \left(n_{Inc} \times \bar{s}_{Inc}\right)}{n_A + n_B + n_C + n_{Inc}}$$
$$\bar{\bar{s}} = \frac{\left(n_A \times \bar{s}_A\right) + \left(n_B \times \bar{s}_B\right) + \left(n_C \times \bar{s}_C\right) + \left(n_{Inc} \times \bar{s}_{Inc}\right)}{N_F}$$
$$\bar{\bar{s}} = \left(\frac{n_A}{N_F} \times \bar{s}_A\right) + \left(\frac{n_B}{N_F} \times \bar{s}_B\right) + \left(\frac{n_C}{N_F} \times \bar{s}_C\right) + \left(\frac{n_{Inc}}{N_F} \times \bar{s}_{Inc}\right)$$
$$\bar{\bar{s}} = \left(f_A \times \bar{s}_A\right) + \left(f_B \times \bar{s}_B\right) + \left(f_C \times \bar{s}_C\right) + \left(f_{Inc} \times \bar{s}_{Inc}\right)$$

En revanche, le fait de calculer la variance à partir de données agrégées réduit sa valeur par rapport à celle que l'on obtiendrait à partir d'un fichier détaillé. En effet, on considère avec les données du tableau 1 que la dispersion des salaires au sein de chaque catégorie de personnels est nulle. On fait par exemple comme si tous les agents de catégories A percevaient le même salaire. On ne tient compte que des écarts entre les salaires moyens de chaque catégorie. Cela réduit nécessairement la variance. Néanmoins, la valeur approchée à partir du tableau 1 donne une bonne indication de la faible dispersion des salaires au sein de la fonction publique.

Annexe : données

Tableau 1. Structure des effectifs des agents de la fonction publique et salaires nets mensuels moyens en 2010

Statut / *catégorie hiérarchique*	**Structure des effectifs en 2010 (en %)**	**Salaires en 2010 (en €)**
Titulaires	**83,8**	**2 526**
Répartition pour 100 titulaires		
Catégorie A	*63,6*	2 758
Catégorie B	*19,6*	2 334
Catégorie C		1 869
Catégorie inconnue		*1 940*
Non-titulaires	**16,2**	**2 113**
Ensemble	**100,0**	**2 459**

Champ : France, agents civils des ministères de l'État en équivalent temps plein (hors militaires et établissements nationaux ; y compris emplois aidés).

Source : Insee, Siasp