

Idup / janvier 21

Master 1 : Analyse statistique (J.-F. Léger)

5. Caractéristiques de concentration statistique

Exercice 2. L'inégale répartition communale de la population française

Corrigé

L'Insee a publié le 2 janvier 2017¹ les effectifs des populations légales, c'est-à-dire l'effectif de la population de chaque commune de France au 1^{er} janvier 2014 (France métropolitaine, départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de La Réunion, limites territoriales en vigueur au 1^{er} janvier 2016).

À partir des données des tableaux 1 et 2 :

Q1. Calculez l'effectif de la population française au 1^{er} janvier 2014 puis la taille moyenne (nombre moyen d'habitants) des communes françaises.

Q2. Déterminez la taille (effectif de la population) médiane des communes françaises. Quelle est la part de la population française qui réside dans les communes dont la taille est inférieure à la médiane ?

Q3. Déterminez la densité moyenne de la population en France.

Q4. Tracez un carré de Gini de deux façons différentes puis calculez l'indice de Gini.

Q5. Commentez, sous la forme d'un bref article de 300 à 500 mots environ, les données des tableaux 1 et 2 complétées, si possible, par les résultats des questions 1 à 3. Articulez en particulier les caractéristiques des communes et la répartition de la population selon le type de commune. N'oubliez pas : « écrivez pour être lu ! »

N.B. : Pour l'ensemble de ces questions, le champ géographique est celui de la France entière à l'exception de Mayotte, soit : la France métropolitaine, les départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de La Réunion.

¹ F. Tallet, V. Vallès, 2017, « La prédominance démographique des plus grandes communes s'atténue », *Insee Focus*, n° 74 (janvier).

Corrigé

Préambule : bien lire et comprendre le tableau 1.

Le tableau 1 est une version abrégée du tableau diffusé par l'Insee. Les colonnes 2 et 3 correspondent à un cumul de proportions. La dernière colonne indique la borne inférieure correspondant aux groupes de communes définies par la colonne 1.

Par exemple : les 100 communes de France les plus peuplées représentent 0,279 % des 35 868 communes françaises :

$$\frac{100}{35\,868} = 0,00279 = 0,279 \%$$

Les 1 000 communes les plus peuplées représentent une proportion dix fois plus importante et les 10 000 communes les plus peuplées une proportion cent fois plus élevée :

$$\frac{1\,000}{35\,868} = 0,0279 = 2,79 \%$$

$$\frac{10\,000}{35\,868} = 0,279 = 27,9 \%$$

Plus le nombre de communes augmente (colonne 2), plus la part de la population française y résidant augmente aussi. La relation n'est toutefois pas nécessairement proportionnelle :

- Les 100 communes les plus peuplées concentrent à elles seules 21,5 % de la population française. En d'autres termes, 0,25 % des communes environ accueillent un cinquième environ de la population française.
- Un ensemble de communes dix fois plus important (les 1 000 plus grandes communes de France) accueille seulement 2,5 fois plus d'habitants (environ 50 % de la population).

La dernière colonne donne une précision sur la taille démographique de la commune la plus petite de l'ensemble considéré. Ainsi, la commune la plus petite parmi les 100 plus grandes de France compte 55 817 habitants. En d'autres termes, la 100^e ville la plus peuplée de France compte 55 817 habitants. La 1 000^e ville la plus peuplée de France compte pour sa part 9 779 habitants, etc.

Au final, on peut mettre en relation toutes ces informations comme le fait précisément la note de lecture en bas du tableau : les 100 communes françaises les plus peuplées (colonne 1) comptent au moins 55 817 habitants en 2014 (colonne 4). Elles représentent près de 0,3 % de l'ensemble des communes françaises (colonne 2), mais l'ensemble des personnes qui y vivent constitue 21,5 % de la population (colonne 3).

Q1. La commune de rang 1 (colonne 1), soit la commune la plus peuplée de France (Paris, composée de 20 arrondissements qui sont chacun une commune) compte au 1^{er} janvier 2014 2 240 838 habitants (colonne 4), soit 3,4 % de la population française (colonne 3). On en déduit la taille de la population française :

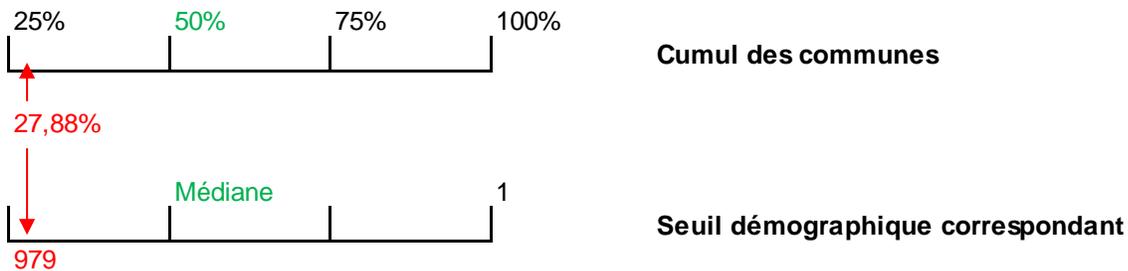
$$\frac{P_{Paris}}{P_{France}} = \frac{2\,240\,838}{P_{France}} = 3,4\% = 0,034$$

$$P_{France} = \frac{P_{Paris}}{0,034} = 65\,907\,000$$

Le 1^{er} janvier 2014, la France (hors Mayotte) comptait 65,9 millions d'habitants. Comme on dénombre 35 868 communes, chaque commune compte en moyenne 1 837 habitants :

$$\bar{p} = \frac{65\,907\,000}{35\,868} = 1\,837$$

Q2. Le tableau 1 indique que 27,88% des communes comptent au moins 979 habitants (borne supérieure de l'intervalle au sein duquel se trouve la médiane) et que 100 % des communes comptent au moins un habitant (borne inférieure de l'intervalle au sein duquel se trouve la médiane). La taille médiane des communes est donc comprise entre 1 et 979 :



$$P_{médiane} = 979 - \left(\frac{50 - 27,88}{100 - 27,88} \right) \times (979 - 1) = 679$$

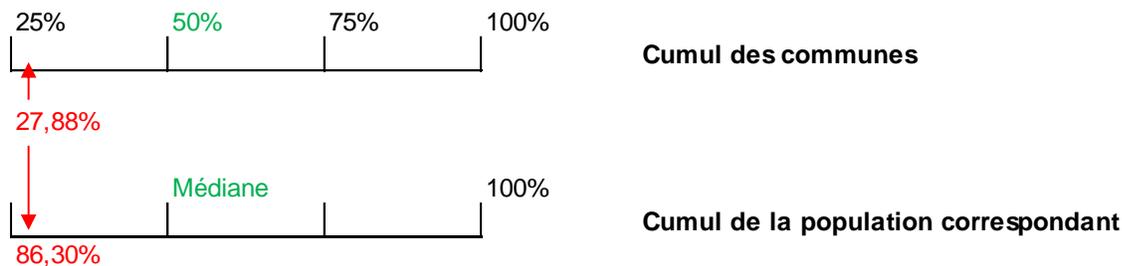
La moitié des 35 868 communes françaises compte au moins 679 habitants, ce qui signifie aussi qu'une commune française sur deux compte moins de 679 habitants.

On peut ici approcher ce calcul simplement, à partir de valeurs arrondies. Le cumul de pourcentages correspondant à la valeur médiane (50 %) se trouve, par rapport au pourcentage cumulé (ici 25 % environ) correspondant à la borne supérieure (environ 1 000 habitants), au tiers de l'intervalle séparant les bornes de cet intervalle (75 = 100 – 25 environ). De ce fait, la valeur médiane peut être ici approchée de la façon suivante :

$$P_{pmed} \approx 1000 - \frac{1}{3} \times 1000 = 667$$

On adopte la même démarche de calcul pour déterminer la part de la population française qui réside au sein des communes de moins de 679 habitants.

27,88 % des communes (celles comptant au moins 979 habitants) accueillent 86,3 % de la population, tandis que 100 % des communes accueillent 100 % de la population. La part de la population française concentrée dans les villes comptant au moins 679 habitants (cp_{pmed}) est donc comprise entre 86,3 % et 100 % :



$$cp_{pmed} = 86,3 + \left(\frac{50 - 27,88}{100 - 27,88} \right) \times (100,0 - 86,3) = 90,5 \%$$

Neuf français sur dix réside dans une commune comptant au moins 679 habitants (ou : la moitié des communes accueille 90 % de la population française). Par conséquent, un français sur dix réside dans une commune comptant moins de 679 habitants.

Là encore, on peut approcher ce résultat par un calcul simplifié :

$$cp_{pmed} \cong 85 + \frac{1}{3} \times (100 - 85) = 85 + \frac{1}{3} \times 15 = 85 + 5 = 90 \%$$

Q3. La densité de population (indicateur) est le rapport entre le nombre d'habitants (numérateur) et la surface du territoire sur lequel vit cette population (dénominateur).

Pour calculer la valeur moyenne d'un indicateur qui correspond à un rapport, deux démarches sont possibles. Dans le cas présent :

- Soit on calcule la moyenne arithmétique des densités de chaque catégorie de communes (d_i) pondérée par la part de la surface totale occupée par chacune de ces catégories de communes (s_i/S), c'est-à-dire la moyenne arithmétique de l'indicateur pondérée par le dénominateur de ce même indicateur :

$$\bar{S} = \sum \left(d_i \times \frac{s_i}{S} \right)$$

- Soit on calcule une moyenne harmonique, c'est-à-dire l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses des densités de chaque catégorie de communes ($1/d_i$)

pondérée par la part de la population totale qui réside dans chacune de ces catégories de communes (p_i / P), c'est-à-dire l'inverse de la moyenne arithmétique de l'inverse de l'indicateur pondérée par le numérateur de ce même indicateur :

$$\bar{S} = \frac{1}{\sum \left(\frac{1}{d_i} \times \frac{p_i}{P} \right)}$$

Dans le cas présent, compte tenu des données dont on dispose, la détermination d'une moyenne harmonique nécessite de faire beaucoup moins de calculs que celle d'une moyenne arithmétique.

Calcul de la densité à partir d'une moyenne harmonique :

On commence par déterminer les inverses des densités à partir des données du tableau 2, puis on détermine le poids démographique de chaque catégorie de communes à partir de la colonne 3 du tableau 1. Cette colonne indique le cumul (en proportion) de la population française : 3,4 % de cette dernière réside dans la commune la plus peuplée de France, 8,7 % dans les dix plus importantes communes de France (y compris la première), 21,5 % dans les 100 plus grosses communes (y compris les 10 plus importantes), etc. Pour déterminer le poids démographique relatif de chacune des catégories de communes, il faut donc décumuler ces valeurs. Par exemple, la part de la population française qui réside dans les communes classées, d'un point de vue démographique, de la 2^e place à la 10^e place (rang 2-10), est de 5,3 % (8,7 – 3,4).

Tableau des valeurs nécessaires au calcul de la densité à partir d'une moyenne harmonique

Rang des communes (i)	Inverse des densités (1/d _i)	Poids démographiques (p _i /P) en %
1	0,00005	3,4
2-10	0,00022	5,3
11-100	0,00045	12,8
101-500	0,00146	18,6
501-1 000	0,00463	10,0
1001-5 000	0,00654	25,5
5001-10 000	0,01538	10,7
10001-35 868	0,04000	13,7

On a donc toutes les informations nécessaires au calcul de la densité moyenne :

$$\bar{S} = \frac{1}{\sum \left(\frac{1}{d_i} \times \frac{p_i}{P} \right)} = \frac{1}{(0,00005 \times 3,4) + (0,00022 \times 5,3) + \dots + (0,04 \times 13,7)} = 104 \text{ hab/km}^2$$

Calcul de la densité à partir d'une moyenne arithmétique :

Il faut au préalable calculer la superficie couverte par chaque catégorie de communes (s_i), puis leur poids géographique relatif par rapport à la superficie totale de la France (s_i/S).

$$\text{Comme : } d_i = \frac{p_i}{s_i}, \quad s_i = \frac{p_i}{d_i}$$

Exemple : puisque la population de Paris est de 2,24 millions de personnes et la densité de 21 147 hab/km², la superficie de Paris est de 106 km².

$$s_{\text{Paris}} = \frac{p_{\text{Paris}}}{d_{\text{Paris}}} = \frac{2\,240\,838}{21\,147} = 106 \text{ km}^2$$

Pour les autres catégories de communes, il faut au préalable déterminer le nombre d'habitants y résidant. On commence par calculer la part de la population française résidant dans chaque catégorie de communes (fp_i) en décumulant les valeurs de la colonne 3 du tableau 1 comme on l'a fait pour le calcul de la moyenne harmonique, puis de multiplier ces proportions par la population totale de la France (question 1).

Exemple de calcul pour les communes dont le rang démographique est compris entre la 2^e et la 10^e place (inclus) :

$$s_{2-10} = \frac{p_{2-10}}{d_{2-10}} = \frac{\frac{(8,7 - 3,4)}{100} \times 65\,907\,000}{4\,594} = \frac{3\,493\,071}{4\,594} = 760 \text{ km}^2$$

Les communes classées de la 2^e à la 10^e place sur le plan démographique représente 5,3 % de la population française, soit un total de 3,49 millions de personnes réparties sur 760 km², soit une densité de 4 594 habitants au km².

Tableau des valeurs nécessaires au calcul de la densité à partir d'une moyenne arithmétique

Rang des communes (i)	Densité (hab./km ²) en 2014 (d _i)	Part (en %) de la population y résidant en 2014 (f _p _i)	Population y résidant en 2014 (p _i)	Surface en km ² (s _i)	Part (en %) de la surface nationale (s _i /S)
1	21 147	3,4	2 240 838	106	0,020
2-10	4 594	5,3	3 493 071	760	0,120
11-100	2 224	12,8	8 436 096	3 793	0,600
101-500	683	18,6	12 258 702	17 948	2,840
501-1 000	216	10,0	6 590 700	30 513	4,820
1001-5 000	153	25,5	16 806 285	109 845	17,360
5001-10 000	65	10,7	7 052 049	108 493	17,150
10001-35 868	25	13,7	9 029 259	361 170	57,090
Ensemble	104	100,0	65 907 000	632 628	100,000

La densité de population moyenne en France est de 104 habitants au km² :

$$\bar{d} = (21\,147 \times 0,020) + (4\,594 \times 0,12) + \dots + (65 \times 17,15) + (25 \times 57,09) = 104 \text{ hab./km}^2$$

Q4. Carrés de Gini

Méthode 1 : à partir des données du tableau 1

On trace un carré de Gini en plaçant en abscisses les valeurs des fréquences cumulées des communes (population statistique étudiée ici, chaque commune étant un individu statistique), de la commune la plus peuplée à celle la moins peuplée comme mentionné dans le tableau 1. En ordonnées, on place les fréquences cumulées de la population de la France (masse statistique) résidant dans les fractions cumulées de communes correspondantes. Les couples de points (x,y) que l'on représente ont donc pour coordonnées :

- x : proportion de communes qui comptent au moins habitants ;
- y : proportion de la population de la France qui résident dans des communes comptant au moins ... habitants.

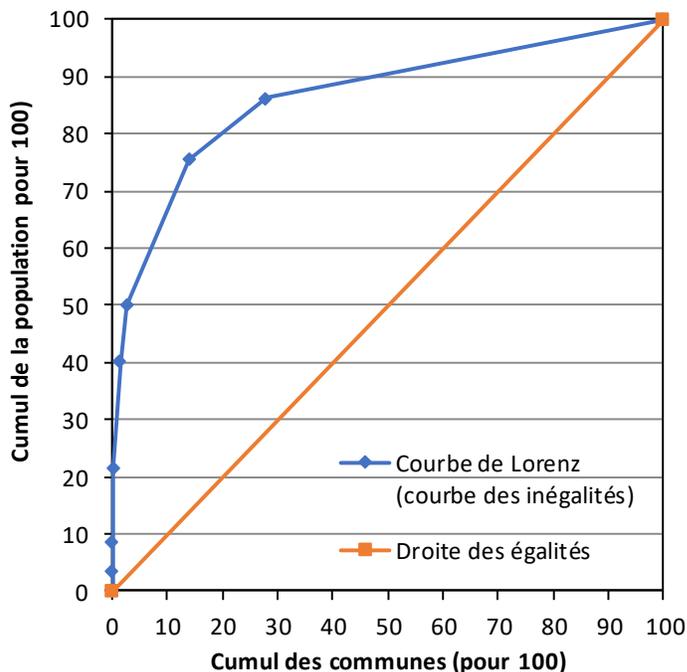
Ici, les grandes communes, qui correspondent à une fraction très faible des 36 000 communes françaises, concentrent une part importante de la population de la France. La courbe est donc au début presque verticale.

Tableau des valeurs utilisées pour tracer le carré de Gini
(valeurs arrondies à 1 chiffre après la virgule)

Rang des communes (de la plus peuplée à la moins peuplée)	X : Proportion parmi l'ensemble des communes (en %)	Y : Part de la population y résidant en 2014 (en %)	Seuil de population en 2014 (<u>au moins</u> ... habitants)
1	0,0	3,4	2 220 445
10	0,0	8,7	233 897
100	0,3	21,5	55 817
500	1,4	40,1	18 463
1 000	2,8	50,1	9 779
5 000	13,9	75,6	2 108
10 000	27,9	86,3	979
35 868	100,0	100,0	1

Exemple de couple de points : (2,8 ; 50,1). Dans les 2,8 % des communes les plus peuplées (celles comptant au moins 9 779 habitants) résident 50,1 % de la population de la France.

Carré de Gini : concentration communale de la population de la France en 2017



La valeur de l'indice de Gini est dans le cas présent de 0,73 ou 73 %, ce qui est une valeur très élevée (cf. calcul dans le classeur Excel associé à ce corrigé).

Méthode 2 : à partir d'une transformation des données du tableau 1

On trace un carré de Gini en plaçant toujours en abscisses les valeurs des fréquences cumulées des communes (population statistique étudiée ici, chaque commune étant un individu statistique), mais cette fois de la commune la moins peuplée à celle la plus peuplée contrairement à ce qui est mentionné dans le tableau 1.

Les couples de points (x,y) que l'on représente ont donc pour coordonnées :

- x : proportion de communes qui comptent moins de habitants ;
- y : proportion de la population de la France qui résident dans des communes comptant moins de ... habitants.

Ici, les petites communes, qui correspondent à une fraction très importante des 36 000 communes françaises, concentrent une part peu élevée de la population de la France. La courbe est donc au début presque horizontale.

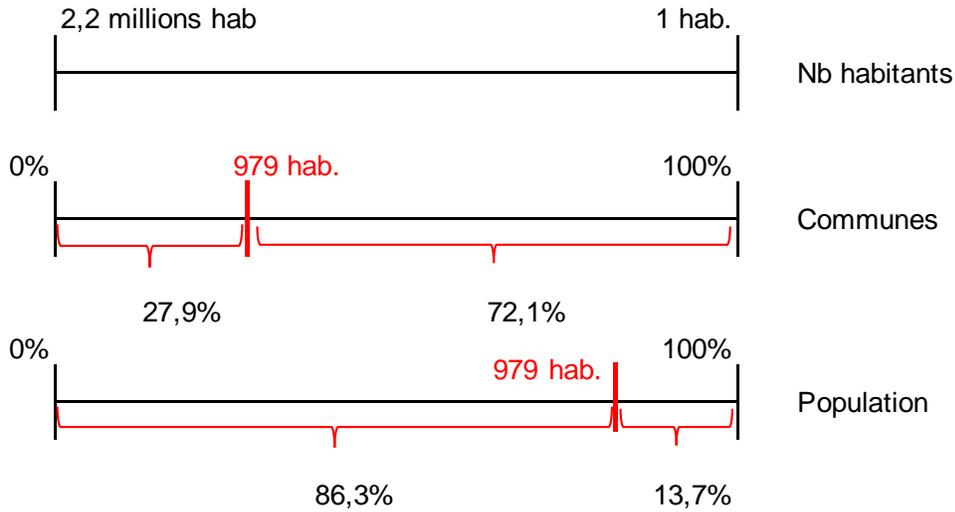
Tableau des valeurs utilisées pour tracer le carré de Gini
(valeurs arrondies à 1 chiffre après la virgule)

Rang des communes (des moins peuplées à la plus peuplée)	X : Proportion parmi l'ensemble des communes (en %)	Y : Part de la population y résidant en 2014 (en %)	Seuil de population en 2014 (<u>moins de</u> ... habitants)
35 868	0,0	0,0	1
10 000	72,1	13,7	979
5 000	86,1	24,4	2 108
1 000	97,2	49,9	9 779
500	98,6	59,9	18 463
100	99,7	78,5	55 817
10	100,0	91,3	233 897
1	100,0	96,6	2 220 445
	100,0	100,0	

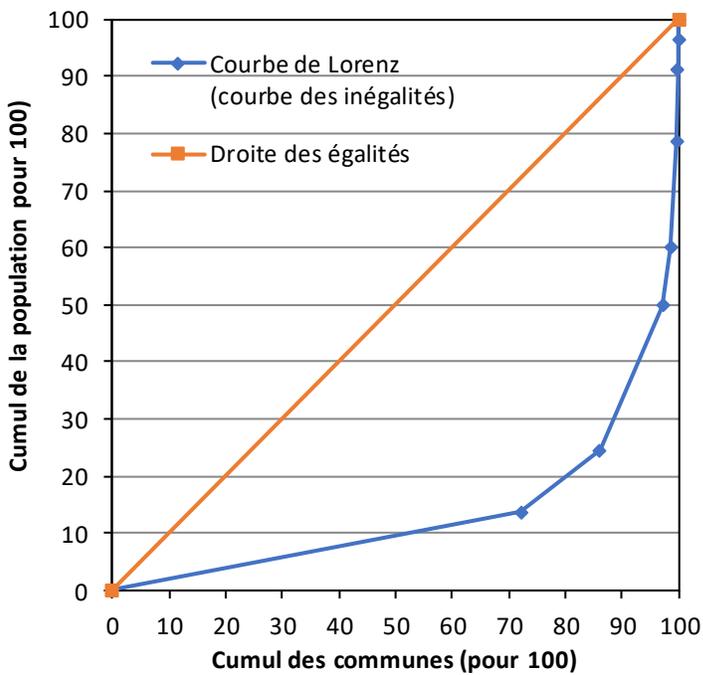
Exemple de couple de points et détermination des coordonnées : (72,1 ; 13,7). Dans les 72,1 % des communes les plus petites résident 13,7 % de la population de la France.

D'après le tableau 1, on sait que 27,9 % des communes comptent au moins 979 habitants. Dans ces 27,9 % de communes résident 86,3 % de la population. La part de communes qui comptent moins de 979 habitants est donc le complément à 100 % des 27,9 % qui en comptent au moins 979, soit : $100\% - 27,9\% = 72,1\%$. Et dans ces 72,1 % résident donc le reste de la population qui n'habite pas dans les communes comptant au moins 979 habitants, soit le complément à 100 % des 86,3 % : $100\% - 86,3\% = 13,7\%$.

Synthèse graphique de la démarche de passage de la série statistique du tableau 1 à celle nécessaire au tracé du carré de Gini avec la méthode 2 :



Carré de Gini : concentration communale de la population de la France en 2017



Ce tracé est le symétrique par rapport à la droite des égalités du tracé avec la méthode 1. La valeur de l'indice de Gini est la même : 0,73.

Q5. Un exemple de commentaire en 361 mots.

En France, dans l'ensemble composé de l'hexagone et des départements de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion, on dénombre 65,9 millions d'habitants au 1^{er} janvier 2014 inégalement répartis dans près de 36 000 communes.

En moyenne, chaque commune compte un peu plus de 1 800 habitants, mais dans près des trois quarts des communes françaises, on dénombre moins de 1 000 habitants. Une commune sur deux compte moins de 700 habitants. Le maillage communal français est donc composé d'unités qui, pour la plupart, sont peu peuplées.

Mais si la plupart des communes de France comptent peu d'habitants, la plupart des Français sont concentrés dans un nombre réduit de communes : la moitié de la population française réside dans les 1 000 communes les plus peuplées qui comptent quasiment toutes environ au moins 10 000 habitants. En d'autres termes, la moitié des Français est concentrée dans moins de 3 % des communes. À elles seules, les 100 plus grosses communes de France, qui comptent chacune au moins 56 000 habitants, concentrent plus d'un français sur cinq (21,5 %), tandis que les 26 000 communes de moins de 1 000 habitants n'en accueillent qu'à peine plus de un sur dix (13,7 %).

Cette concentration importante de la population française dans un nombre réduit de communes explique donc un paradoxe : alors que la densité de population de la France est relativement faible (106 habitants au km²), la plupart des français vivent dans des environnements beaucoup plus densément peuplés : quatre français sur dix résident au sein d'une des communes comptant au moins 18 463 habitants (soit les 500 plus grosses villes de France) au sein desquelles la densité est en moyenne dix fois plus élevée que la densité de la France entière (1 169 habitants au km²). Au sein de ces espaces bien plus denses sur le plan démographique que la moyenne nationale, la situation de Paris et ses 21 000 habitants au km² est tout à fait particulière et unique.

Si une grande partie de la population résidant en France est donc urbaine, le territoire français est pour sa part, dans son ensemble, bien loin d'être urbanisé.

Tableau 1. Répartition de la population selon le rang démographique de la commune de résidence

Rang des communes	Proportion parmi l'ensemble des communes (en %)	Part de la population y résidant en 2014 (en %)	Seuil de population en 2014
1	0,003	3,4	2 240 838
10	0,028	8,7	233 897
100	0,279	21,5	55 817
500	1,394	40,1	18 463
1 000	2,788	50,1	9 779
5 000	13,940	75,6	2 108
10 000	27,880	86,3	979
35 868	100,000	100,0	1

Lecture : les 100 communes françaises les plus peuplées comptent au moins 55 817 habitants en 2014. Elles représentent près de 0,3 % de l'ensemble des communes françaises, mais l'ensemble des personnes qui y vivent constitue 21,5 % de la population.

Champ : France hors Mayotte, limites territoriales communales en vigueur au 1er janvier 2016.

Source : Insee, recensements de la population 2014 (F. Tallet, V. Vallès, 2017).

Tableau 2. Densité de population (habitants / km²) selon le rang démographique de la commune de résidence

Rang des communes	Densité en 2014 (nombre d'habitants au km ²)
1	21 147
2-10	4 594
11-100	2 224
101-500	683
501-1 000	216
1 001-5 000	153
5 001-10 000	65
10 001-35 868	25

Lecture : La plus grande commune de France, Paris, compte 21 147 habitants au km².

Champ : France hors Mayotte, limites territoriales communales en vigueur au 1er janvier 2016.

Source : Insee, recensements de la population 2014 (calculs : JFL).