

Exercice 5**La répartition des primes au tournoi de tennis de Wimbledon en 2012****Corrigé**

Le tournoi de tennis de Wimbledon est l'un des quatre principaux événements de la saison de tennis professionnel masculin. Il réunit chaque année au mois de juillet à Londres, les 128 meilleurs joueurs du monde. En juillet 2012, l'épreuve a été remportée pour la 7^e fois par le Suisse Roger Federer qui a par la même occasion empoché une prime de victoire de 1 427 000 euros.

Le principe de l'épreuve est celle d'un tableau par élimination directe. Au 1^{er} tour, 64 matches permettent de sélectionner les vainqueurs pour le tour suivant. Au deuxième tour, 32 matches sont organisés pour désigner ceux qui accéderont au 3^e tour et ainsi de suite jusqu'à la finale. En fonction du niveau atteint, les joueurs perçoivent une prime : elle est par exemple de 18 000 euros pour ceux éliminés au 1^{er} tour, de 29 000 euros pour ceux battus au deuxième tour, etc. (tableau 1).

1) Quelle est la dotation totale du tournoi masculin ? Quelle est la part attribuée au vainqueur ?**Corrigé**

Il faut commencer par construire un tableau statistique unidimensionnel dans lequel on attribue à chaque montant de prime le nombre de joueurs qui perçoivent une telle rémunération. 128 joueurs disputent le 1^{er} tour. Les 64 perdants reçoivent donc 18 000 euros. Sur les 64 joueurs qualifiés au deuxième tour, 32 vont perdre à ce stade de la compétition : ils gagnent chacun 29 000 euros. Sur les 32 joueurs qui atteignent le 3^e tour, 16 n'iront pas plus loin : ils perçoivent tous une prime de 48 000 euros et ainsi de suite jusqu'au vainqueur.

Distribution des joueurs selon le montant de la prime

Niveau atteint	Prime en € (xi)	Effectif (ni)
1er tour	18 000	64
2e tour	29 000	32
3e tour	48 000	16
1/8 finale	93 000	8
1/4 finale	181 000	4
1/2 finale	357 000	2
finale	713 000	1
vainqueur	1 427 000	1
Total		128

La population étudiée est celle des joueurs de tennis participant à ce tournoi. L'effectif total de cette population est de 128 individus. La variable étudiée, qui permet de distribuer cette population, est le montant des primes distribuées par l'organisateur du tournoi. Dans le cas présent, il s'agit d'une variable quantitative discrète.

La dotation totale du tournoi (DT) masculin correspond à la somme des produits des montants des primes (x_i) par l'effectif de joueurs en bénéficiant (n_i) :

$$DT = \sum_{i=1}^8 (n_i \times x_i)$$

$$DT = (64 \times 18\,000) + (32 \times 29\,000) + \dots + (1 \times 713\,000) + (1 \times 1\,427\,000)$$

$$DT = 7\,170\,000 \text{ €}$$

Grâce à sa victoire dans cette compétition, Roger Federer a reçu 20 % de la dotation globale de ce tournoi :

$$\% RF = \frac{1\,427\,000}{7\,170\,000} = 0,199 = 19,9 \%$$

2) Déterminez la prime moyenne et son écart-type.

Corrigé

La prime moyenne (PM) est le rapport entre la dotation globale et le nombre de joueurs (N) qui se la partagent. Elle s'élève ici à 56 016 €.

$$PM = \frac{DT}{N} = \frac{\sum_{i=1}^8 (n_i \times x_i)}{N} = \frac{7\,170\,000}{128} = 56\,016 \text{ €}$$

L'écart-type est une mesure qui approche l'écart-moyen entre la prime perçue par chacun des joueurs et cette prime moyenne. Elle correspond à la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. On peut compléter ce calcul par celui du coefficient de variation qui correspond au rapport entre l'écart-type et la moyenne.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^8 [n_i \times (x_i - PM)^2]}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{[64 \times (18\,000 - 56\,016)^2] + [32 \times (29\,000 - 56\,016)^2] + \dots + [1 \times (1\,427\,000 - 56\,016)^2]}{128}}$$

$$\sigma_x = 144\,771 \text{ €}$$

$$CV = \frac{\sigma_x}{PM} = \frac{144\,771}{56\,016} = 2,58$$

Dans le cas présent, l'étendue considérable des valeurs (l'écart entre la prime la moins élevée et la plus forte est de 1 409 000 euros, c'est-à-dire que le vainqueur gagne ici 78 fois plus qu'un joueur battu au 1^{er} tour) explique en grande partie l'importance de l'écart-type : il est de 144 771 €, soit 2,6 fois la valeur de la prime moyenne !

3) Comparez la médiane à la médiale (calculs et une traduction en français !).

Corrigé

La prime médiane est la valeur de la prime qui partage en deux le nombre de joueurs. Attention, la variable est ici de type quantitatif discret. La médiane ne peut donc prendre qu'une des valeurs prises par la variable. Dans le cas présent, la moitié des joueurs étant éliminés au 1^{er} tour, la prime médiane est celle correspondant à ce niveau de « performance », soit 18 000 euros.

La prime médiale est la valeur prise par la variable qui partage la masse statistique (ici la dotation globale, que l'on pourrait assimiler à la masse salariale attribuée à l'ensemble des participants) en deux masses égales. Elle suppose au préalable de déterminer la part de la dotation globale attribuée à l'ensemble des battus au 1^{er} tour, à tous ceux éliminés au 2^e tour, etc. On sait déjà que 20 % de la dotation totale du tournoi a été attribuée au seul Roger Federer.

Tableau de synthèse des calculs

Performance	Prime en € (xi)	Effectif (ni)	fi [1]	fi cumulées [2]	Masse salariale [3]	% de masse salariale [4]	masse salariale cumulée [5]
1er tour	18 000	64	50,0%	50,0%	1 152 000	16,1%	16,1%
<i>2e tour</i>	<i>29 000</i>	<i>32</i>	<i>25,0%</i>	<i>75,0%</i>	<i>928 000</i>	<i>12,9%</i>	<i>29,0%</i>
3e tour	48 000	16	12,5%	87,5%	768 000	10,7%	39,7%
1/8 finale	93 000	8	6,3%	93,8%	744 000	10,4%	50,1%
<i>1/4 finale</i>	<i>181 000</i>	<i>4</i>	<i>3,1%</i>	<i>96,9%</i>	<i>724 000</i>	<i>10,1%</i>	<i>60,2%</i>
1/2 finale	357 000	2	1,6%	98,4%	714 000	10,0%	70,2%
finale	713 000	1	0,8%	99,2%	713 000	9,9%	80,1%
vainqueur	1 427 000	1	0,8%	100,0%	1 427 000	19,9%	100%
Total		128	100,0%		7 170 000	100,0%	

Lecture des données en italique et surlignées en gris :

[1] Un quart des 128 joueurs (soit 32 joueurs) perdent au deuxième tour. [2] Au total, les trois quarts des joueurs ont déjà été éliminés à la fin du 2^e tour. [3] La somme des gains perçus par les joueurs ayant perdu au 2^e tour s'élève à 928 000 euros. Cette somme correspond au produit de la prime attribuée à chacun des joueurs ayant perdu au 2^e tour par leur nombre :

$$MS_{2eT} = 32 \times 29\,000 = 928\,000 \text{ €}$$

[4] Cette somme représente 12,9 % de la dotation globale du tournoi. On peut rapprocher cette information de celle de la colonne [1] : 12,9 % de la dotation globale du tournoi est attribuée à un quart des joueurs (en l'occurrence ceux éliminés au deuxième tour). [5] Et 29 % de l'ensemble des primes distribuées lors de ce tournoi sont destinées aux joueurs qui ont été éliminés avant d'atteindre le troisième tour (ceux éliminés au 1^{er} et au 2^e tour), qui représentent les trois quarts des participants.

[1] 3,1 % des joueurs ont été éliminés en quart de finale. [2] Au total, 96,9 % des joueurs ont été éliminés avant d'atteindre les demi-finales. [3] Les quatre joueurs éliminés à ce stade de la compétition (les quarts de finale) se partagent la somme de 724 000 euros, [4] qui correspond à 10,1 % de la dotation globale du tournoi. [5] Au total, les joueurs éliminés avant d'atteindre les demi-finales (96,9 % des joueurs) se partagent (inégalement comme on le devine déjà) 60,2 % des gains attribués à l'ensemble des participants.

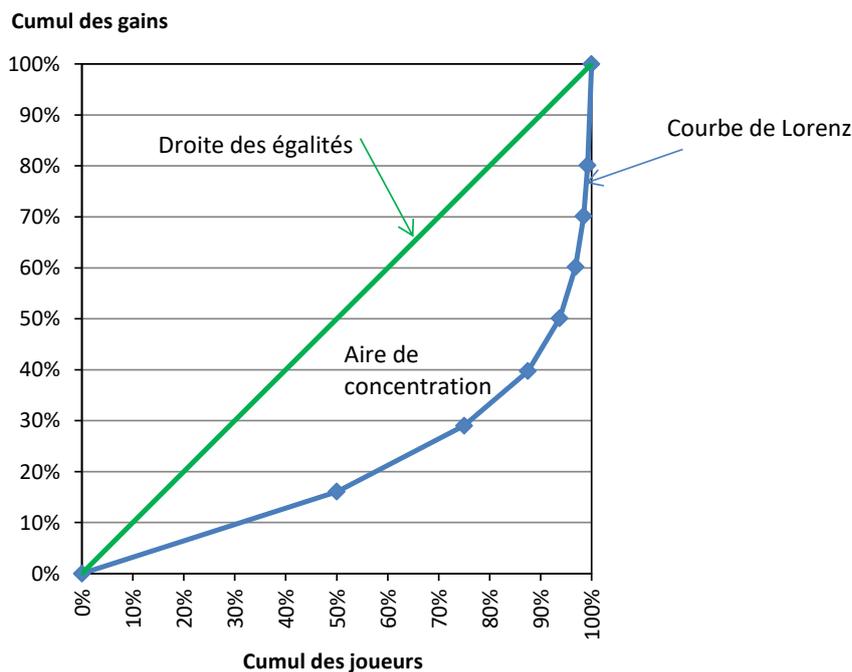
Ici, pour atteindre la moitié de la dotation globale, il faut cumuler les gains de l'ensemble des joueurs éliminés avant d'atteindre les quarts de finale. La prime médiale correspond donc à celle des joueurs éliminés en 1/8^e de finale, soit 93 000 €.

4) Tracez un carré de Gini et calculez l'indice de Gini.

Corrigé

Le carré de Gini représente le lien entre le cumul des participants (sur l'axe des abscisses) et le cumul des gains attribués aux joueurs (axe des ordonnées). C'est un lien graphique entre les colonnes [2] et [5] du tableau ci-dessus.

Carré de Gini : Distribution des primes lors du tournoi de Wimbledon



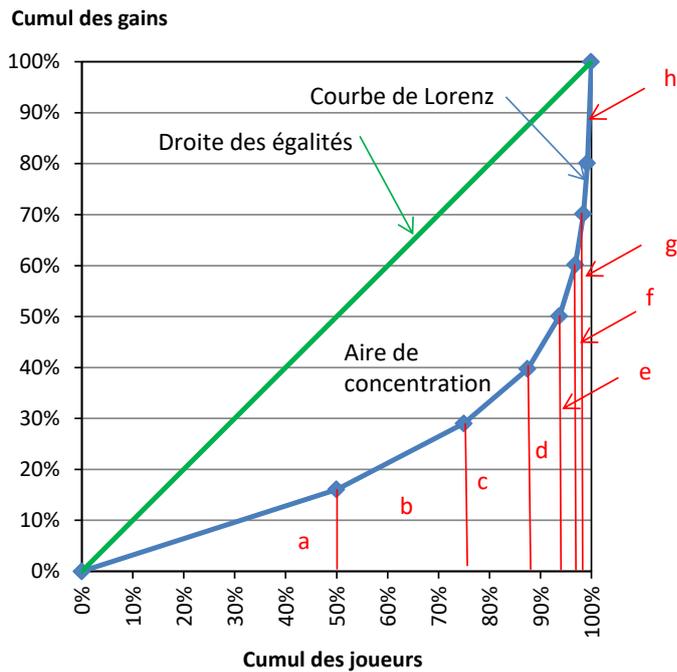
L'indice de Gini est le rapport entre la surface de concentration (la surface comprise entre la droite des égalités et la courbe de Lorenz) et la surface située sous la droite des égalités. Il mesure l'écart relatif (de 0 à 100 %) par rapport à une situation d'égalité qui correspondrait ici au cas où chacun des 128 joueurs percevrait la même prime, soit la prime moyenne (56 016 €).

Pour calculer la surface de concentration, on va effectuer la différence entre la surface située sous la droite des égalités et celle située sous la courbe de Lorenz.

La surface située sous la droite des égalités correspond à la demi-surface du carré de côté 1 (ou 100 %), soit 0,5.

La surface située sous la courbe de Lorenz est la somme des trapèzes dont les bases sont définies par la différence entre deux fréquences relatives cumulées (colonne [2]) et les hauteurs par la différence entre deux masses statistiques relatives cumulées (colonne [5]).

Détermination de la surface située sous la courbe de Lorenz



La surface d'un trapèze correspond au produit de la base par la hauteur moyenne.

$$T_a = (0,5 - 0) \times \frac{(0 + 0,161)}{2} = 0,04$$

$$T_b = (0,75 - 0,5) \times \frac{(0,161 + 0,29)}{2} = 0,06$$

$$T_c = (0,875 - 0,75) \times \frac{(0,29 + 0,397)}{2} = 0,04$$

$$T_d = (0,938 - 0,875) \times \frac{(0,397 + 0,501)}{2} = 0,03$$

$$T_e = (0,969 - 0,938) \times \frac{(0,501 + 0,602)}{2} = 0,02$$

$$T_f = (0,984 - 0,969) \times \frac{(0,602 + 0,702)}{2} = 0,01$$

$$T_g = (0,992 - 0,984) \times \frac{(0,702 + 0,801)}{2} = 0,01$$

$$T_h = (1 - 0,992) \times \frac{(0,801 + 1)}{2} = 0,01$$

La surface située sous la courbe de Lorenz est de 0,22 :

$$\sum_{\alpha=a}^h T_{\alpha} = 0,04 + \dots + 0,01 = 0,22$$

L'indice de Gini vaut donc :

$$IG = \frac{0,5 - \sum_{\alpha=a}^h T_{\alpha}}{0,5} = \frac{0,5 - 0,22}{0,5} = \frac{0,28}{0,5} = 0,56 = 56 \%$$

Cette valeur est assez élevée et résume bien le fait qu'une grande partie du montant total des primes est attribuée à un nombre réduit de joueurs.

5) A partir de ces informations, rédigez un petit article (format « 20 minutes » par exemple). Pour conclure cette brève, vous indiquerez également, sans faire de calcul, comment évoluerait la concentration des gains, si tout au long de la saison de tennis professionnelle qui comporte des dizaines de tournois :

- les 4 mêmes joueurs atteignent toujours les $\frac{1}{2}$ finales ?
- ce n'était quasiment jamais les mêmes joueurs qui atteignent les derniers tours de chaque tournoi ?

Proposition de corrigé

Roger Federer rafle la mise. En remportant son septième titre à Wimbledon, Roger Federer a aussi empoché un chèque de près de 1,5 million d'euros, soit 20 % des gains distribués pendant le tournoi. C'est bien plus que les 64 joueurs éliminés dès le 1^{er} tour, qui se sont pourtant partagés un peu moins de 1,2 million d'euros. Le tournoi révèle d'ailleurs la répartition très inégale des gains entre joueurs : les huit meilleurs joueurs du tournoi (ceux qui ont atteint les quarts de finale) ont perçu la moitié de la dotation globale du tournoi (3,6 des 7,2 millions mis en jeu), alors qu'ils ne représentent que 6,3 % des participants.

Pour réduire la mainmise de quelques joueurs sur les revenus distribués par les organisateurs des tournois, il faudrait que les joueurs qui atteignent les derniers tours des principaux tournois de l'année ne soient pas toujours les mêmes. Ce n'est pas vraiment ce qui a été observé en 2012 : aucun des 14 principaux tournois disputés cette année n'a échappé à l'un des cinq meilleurs joueurs mondiaux.

Tableau des primes (en euros) – Wimbledon 2012

Niveau atteint	Prime en €
Vainqueur	1 427 000
Finale	713 000
1/2 finale	357 000
1/4 finale	181 000
1/8 ^e finale	93 000
3 ^e tour	48 000
2 ^e tour	29 000
1 ^{er} tour	18 000