IDUP / décembre 21

M1 : Analyse statistique (JF Léger)

Mesures des variations chronologiques

Exercice 3 : Evolution récente et perspective démographique de la France métropolitaine

CORRIGE

1. Complétez les tableaux 1 et 2.

Corrigé

Pour compléter ces deux tableaux, il faut croiser les informations de chacun d'eux.

a) P_{1982}

L'INSEE détermine des taux de solde annuel moyen. En toute rigueur, le calcul de l'effectif de la population en 1982 devrait être effectué à partir de la formule de calcul du taux de solde annuel moyen (nommé ici par l'INSEE « variation annuelle moyenne de la population en % ») :

$$TA_{1975-1982} = \frac{\dfrac{P_{1982} - P_{1975}}{1982 - 1975}}{\dfrac{P_{1975} + P_{1982}}{2}}$$

$$TA_{1975-1982} \times \frac{P_{1975} + P_{1982}}{2} = \frac{P_{1982} - P_{1975}}{1982 - 1975}$$

$$\left(TA_{1975-1982} \times \frac{P_{1975}}{2}\right) + \left(TA_{1975-1982} \times \frac{P_{1982}}{2}\right) = \frac{P_{1982}}{1982 - 1975} - \frac{P_{1975}}{1982 - 1975}$$

$$\left(TA_{1975-1982} \times \frac{P_{1975}}{2}\right) + \frac{P_{1975}}{1982 - 1975} = \frac{P_{1982}}{1982 - 1975} - \left(TA_{1975-1982} \times \frac{P_{1982}}{2}\right)$$

$$P_{1975} \times \left(\frac{TA_{1975-1982}}{2} + \frac{1}{1982 - 1975}\right) = P_{1982} \times \left(\frac{1}{1982 - 1975} - \frac{TA_{1975-1982}}{2}\right)$$

$$P_{1982} = P_{1975} \times \frac{\left(\dfrac{TA_{1975-1982}}{2} + \dfrac{1}{1982 - 1975}\right)}{\left(\dfrac{1}{1982 - 1975} - \dfrac{TA_{1975-1982}}{2}\right)}$$

$$P_{1982} = 52\ 591\ 584 \times \frac{\left(\dfrac{0{,}0047}{2} + \dfrac{1}{1982 - 1975}\right)}{\left(\dfrac{1}{1982 - 1975} - \dfrac{0{,}0047}{2}\right)} = 54\ 350\ 786$$

Toutefois, sur des périodes de temps relativement courtes du point de vue de l'analyse démographique (quelques dizaines d'années) et pour des variations relatives annuelles de faible ampleur du point de vue statistique (de l'ordre de 1 %), on a vu en cours de manière empirique que la valeur du taux de solde annuel moyen était quasiment la même que celle obtenue à partir d'un calcul se fondant sur l'hypothèse d'une variation exponentielle de la population. Ces conditions sont remplies ici, puisque la période intercensitaire est de 7 ans et la variation annuelle moyenne en % de 0,47 %. Dès lors :

$$TA_{1975\text{–}1982} \cong r$$

$$\frac{\dfrac{P_{1982} - P_{1975}}{1982 - 1975}}{\dfrac{P_{1975} + P_{1982}}{2}} \cong \sqrt[(1982-1975)]{\frac{P_{1982}}{P_{1975}}} - 1$$

On peut donc déterminer l'effectif de la population métropolitaine de la manière suivante :

$$P_{1982} = P_{1975} \times (1 + 0{,}0047)^7$$
$$P_{1982} = 52\ 591\ 584 \times (1 + 0{,}0047)^7 = 53\ 346\ 436$$

L'écart par rapport au calcul précédent est de 4 000 personnes, soit un écart relatif de 0,008 %. Cette différence est négligeable, surtout en regard des incertitudes pesant sur les effectifs recensés, même à l'échelle nationale[1].

Dans le cas présent, il était donc plus efficace d'utiliser cette dernière relation pour déterminer le nombre de personnes résidant en France métropolitaine en 1982. C'est la valeur que l'on retient dans la suite de l'exercice.

b) Densité de population en 1982 : d_{1982}

La densité de population (d_i) est le rapport entre l'effectif d'une population (P_i) et la surface du territoire (S_i) sur laquelle elle réside. On connaît en 1975 la densité de population ainsi que l'effectif de la population. On peut donc en déduire la superficie de la France.

$$d_i = \frac{P_i}{S_i}$$

$$S_i = \frac{P_i}{d_i}$$

$$S_{1975} = \frac{P_{1975}}{d_{1975}} = \frac{52\ 591\ 584}{96{,}7} = 543\ 893\ km^2$$

La superficie de la métropole n'a pas varié entre 1975 et 1982. Elle est d'ailleurs la même depuis 1918[2]. Donc :

[1] Cf. Héran F. et Toulemon L. (2005), « Que faire quand la population recensée ne correspond pas à la population attendue », *Population & sociétés*, n° 441 (avril).

[2] Comme les valeurs des densités de population sont arrondies au 1/10e, la valeur de la superficie de la France pouvait varier selon les données mobilisées pour son calcul (543 863 hab/km² avec les données du recensement de 1975).

$$d_{1982} = \frac{P_{1982}}{S_{1982}} = \frac{53\ 346\ 436}{543\ 893} = 99{,}9\ hab/km^2$$

c) P_{1990}

On connait l'accroissement annuel moyen entre 1982 et 1990, ainsi que la population en 1982 (cf. supra). On peut donc en déduire l'effectif de la population au recensement de 1990 :

$$P_{t+N} = P_t + \left(N \times \overline{\Delta}\right)$$
$$P_{1990} = P_{1982} + \left[(1990 - 1982) \times \overline{\Delta}_{82-89}\right] = 54\ 346\ 436 + (8 \times 285\ 036) = 56\ 626\ 724$$

d) d_{1990}

$$d_{1990} = \frac{P_{1990}}{S_{1990}} = \frac{56\ 626\ 724}{543\ 893} = 104{,}1\ hab/km^2$$

e) P_{1999}

On connait cette fois la densité de population en 1999 ainsi que la surface (cf. supra). On en déduit donc l'effectif de la population en 1999.

$$d_i = \frac{P_i}{S_i}$$
$$d_i \times S_i = P_i$$
$$P_{1999} = d_{1999} \times S_{1999}$$
$$P_{1999} = 107{,}6 \times 543\ 893 = 58\ 522\ 887$$

f) d_{2009}

$$d_{2009} = \frac{P_{2009}}{S_{2009}} = \frac{62\ 465\ 709}{543\ 893} = 114{,}8\ hab/km^2$$

g) variation annuelle moyenne 1975-1982

$$\overline{\Delta}_{75-81} = \frac{P_{1982} - P_{1975}}{1982 - 1975} = \frac{54\ 346\ 436 - 52\ 591\ 584}{7} = 250\ 693$$

h) variation annuelle moyenne 1982-1989 en %

$$TA_{82-89} = \frac{\overline{\Delta}_{82-89}}{\frac{P_{1990} + P_{1982}}{2}} = \frac{285\ 036}{\frac{56\ 626\ 724 + 54\ 346\ 436}{2}} = 0{,}0051 = 0{,}51\ \%$$

i) variations annuelles moyennes absolue et relative 1990-1998

$$\overline{\Delta}_{90-98} = \frac{P_{1999} - P_{1990}}{1999 - 1990} = \frac{58\ 522\ 887 - 56\ 626\ 724}{9} = 210\ 685$$

$$TA_{90-98} = \frac{\overline{\Delta}_{90-98}}{\frac{P_{1990} + P_{1999}}{2}} = \frac{210\ 685}{\frac{56\ 626\ 724 + 58\ 522\ 887}{2}} = 0{,}0037 = 0{,}37\ \%$$

j) variations annuelles moyennes absolue et relative 1999-2008

$$\overline{\Delta}_{1999\text{-}2008} = \frac{P_{2009} - P_{1999}}{2009 - 1999} = \frac{62\,465\,709 - 58\,522\,887}{10} = 394\,282$$

$$TA_{99\text{-}2008} = \frac{\overline{\Delta}_{1999\text{-}2008}}{\frac{P_{1999} + P_{2009}}{2}} = \frac{394\,282}{\frac{58\,522\,887 + 62\,465\,709}{2}} = 0{,}0065 = 0{,}65\ \%$$

Tableaux récapitulatifs

Tableau 1 : Population et densité de la France métropolitaine

Année du recensement	Population	Densité moyenne (hab/km²)
1968	49 711 853	91,4
1975	52 591 584	96,7
1982	**54 346 436**	**99,9**
1990	**56 626 724**	**104,1**
1999	**58 522 887**	107,6
2009	62 465 709	**114,8**

Tableau 2 : Variation démographique intercensitaire

Période intercensitaire	Variation annuelle moyenne en %	Solde annuel moyen
1968-1974	0,80 %	411 390
1975-1981	0,47 %	**250 693**
1982-1989	**0,51 %**	285 036
1990-1998	**0,37 %**	**210 685**
1999-2008	**0,65 %**	**394 282**

---

2. Calculez le taux d'accroissement annuel moyen de la population de France métropolitaine entre 1968 et 2009. A ce rythme démographique, en quelle année la métropole pourrait compter 100 millions d'habitants, soit le double de l'effectif recensé en 1968 ?

Corrigé

Le taux d'accroissement annuel moyen sur la période 1968-2008 est de + 0,55 % par an :

$$TA_{1968\text{-}2008} = \frac{\frac{P_{2009} - P_{1968}}{2009 - 1968}}{\frac{P_{1968} + P_{2009}}{2}} = \frac{\frac{62\,465\,709 - 49\,711\,853}{41}}{\frac{62\,465\,709 + 49\,711\,853}{2}} = 0{,}0055 = 0{,}55\ \%$$

Si ce taux de croissance observé entre 1968 et 2009 se maintient, il faudra 126 ans pour doubler l'effectif initial, soit celui de 1968. Il faudrait donc attendre la fin du XXIe siècle (environ 2094) pour atteindre les 100 millions d'habitants.

On cherche N tel que : $P_{1968+N} = 100\,000 \cong 2 \times P_{1968}$

$$P_{1968+N} = P_{1968} \times (1+0{,}0055)^N$$
$$2 \times P_{1968} \cong P_{1968} \times (1+0{,}0055)^N$$
$$\frac{2 \times P_{1968}}{P_{1968}} \cong (1+0{,}0055)^N$$
$$2 \cong (1+0{,}0055)^N$$
$$\ln(2) \cong \ln\left[(1+0{,}0055)^N\right]$$
$$\ln(2) \cong N \times \ln(1+0{,}0055)$$
$$N \cong \frac{\ln(2)}{\ln(1+0{,}0055)} \cong 126 \; ans$$
$$t \cong 1968 + 126 \cong 2094$$

On pouvait aussi partir de 2009. Dans ce cas, on prolonge à partir de 2009 la croissance relative observée entre 1968 et 2009.

On cherche cette fois N' tel que : $P_{2009+N'} = P_{2009} \times (1+0{,}0055)^{N'}$

$$100\ 000\ 000 = 62\ 465\ 709 \times (1+0{,}0055)^{N'}$$
$$\frac{100\ 000\ 000}{62\ 465\ 709} = (1+0{,}0055)^{N'}$$
$$\ln\left(\frac{100\ 000\ 000}{62\ 465\ 709}\right) = N' \times \ln(1+0{,}0055)$$
$$N' = \frac{\ln\left(\frac{100\ 000\ 000}{62\ 465\ 709}\right)}{\ln(1+0{,}0055)} = 86 \; ans$$
$$t = 2009 + 86 = 2095$$

---

3. En fait, en 2009, l'INSEE estime que le nombre d'habitants en France métropolitaine devrait se stabiliser autour de **70 millions d'habitants**, et que ce seuil pourrait être atteint **en 2050**. A quel taux d'accroissement annuel moyen correspond cette projection ?

Corrigé

Cette projection correspond à un accroissement relatif de 0,28 % au cours des 40 prochaines années. Les démographes de l'INSEE envisagent donc un fort ralentissement de la croissance de la population française au cours des prochaines années.

On peut calculer cette variation relative de deux façons différentes :

a) dans le cadre d'une croissance linéaire de la population :

$$TA_{2009\text{-}2049} = \frac{\frac{P_{2050} - P_{2009}}{2050 - 2009}}{\frac{P_{2050} + P_{2009}}{2}} = \frac{\frac{70\ 000\ 000 - 62\ 465\ 709}{41}}{\frac{70\ 000\ 000 + 62\ 465\ 709}{2}} = 0{,}0028 = 0{,}28\ \%$$

b) dans le cadre d'un accroissement relatif constant :

$$P_{2050} = P_{2009} \times (1+r)^{(2050-2009)}$$

$$\frac{P_{2050}}{P_{2009}} = (1+r)^{41}$$

$$r = \sqrt[41]{\frac{P_{2050}}{P_{2009}}} - 1 = \sqrt[41]{\frac{70\ 000\ 000}{62\ 465\ 709}} - 1 = 0{,}0028 = 0{,}28\ \%$$

---

4. **En 2011**, l'Allemagne compte **81,8 millions d'habitants**. Les démographes de l'ONU estiment que la **croissance annuelle moyenne** de la population allemande au cours des prochaines décennies pourrait être égale à **- 0,44 %** (source : Pison, 2011)[3]. Si les projections de l'INSEE pour la France et de l'ONU pour l'Allemagne se vérifient, en quelle année la France comptera-t-elle autant d'habitants que l'Allemagne ?

Corrigé

L'Allemagne compte actuellement nettement plus d'habitants que la France. Toutefois, le nombre de personnes résidant en France devrait encore augmenter au cours des prochaines décennies (cf. supra) tandis que l'effectif de personnes habitant en Allemagne devrait au contraire décroître. Un mouvement de convergence démographique a donc commencé. Les deux pays pourraient, dans les prochaines décennies, compter à peu près le même nombre d'habitants.

Pour connaître le nombre d'années nécessaires à la convergence démographique entre ces deux pays, il est nécessaire de projeter ces populations à partir d'une même date origine. On cherche en effet N tel que : $P^D_{t+N} = P^F_{t+N}$

Or N doit être défini pour les deux populations à partir d'une même origine (*t*). On peut choisir 2011 :

$$P^D_{2011+N} = P^F_{2011+N}$$

$$P^D_{2011} \times (1+r_D)^N = P^F_{2011} \times (1+r_F)^N$$

Il faut donc au préalable estimer l'effectif de la population française en 2011. On peut intégrer ce calcul dans la relation précédente :

$$P^D_{2011} \times (1+r_D)^N = \left(P^F_{2009} \times (1+r_F)^2\right) \times (1+r_F)^N$$

$$\frac{P^D_{2011}}{\left(P^F_{2009} \times (1+r_F)^2\right)} = \frac{(1+r_F)^N}{(1+r_D)^N}$$

$$\ln\left(\frac{P^D_{2011}}{\left(P^F_{2009} \times (1+r_F)^2\right)}\right) = N \times \ln\left(\frac{(1+r_F)}{(1+r_D)}\right)$$

[3] Pison G. (2011), « Tous les pays du monde », *Population & sociétés*, INED, n 480 (juillet-août).

$$N = \frac{\ln\left(\frac{P_{2011}^{D}}{\left(P_{2009}^{F} \times (1+r_F)^2\right)}\right)}{\ln\left(\frac{(1+r_F)}{(1+r_D)}\right)}$$

$$N = \frac{\ln\left(\frac{81{,}8}{\left(62{,}5 \times (1+0{,}0028)^2\right)}\right)}{\ln\left(\frac{(1+0{,}0028)}{(1-0{,}0044)}\right)} = 36{,}6\ ans \cong 37\,ans$$

On pouvait aussi simplifier les calculs et considérer que la population recensée en France en 2009 est très proche de la population de 2011. Il est préférable de faire cette approximation pour la France car son effectif est moins élevé que celui de l'Allemagne et la valeur absolue de son taux d'accroissement plus faible. De ce fait, au début du bond de projection, le solde démographique annuel est, en valeur absolue, bien moins élevé en France qu'en Allemagne.

Calcul approché de N :

$$N = \frac{\ln\left(\frac{P_{2011}^{D}}{P_{2009}^{F}}\right)}{\ln\left(\frac{(1+r_F)}{(1+r_D)}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{81{,}8}{62{,}5}\right)}{\ln\left(\frac{(1+0{,}0028)}{(1-0{,}0044)}\right)} = 37{,}3\ ans \cong 37\ ans$$

Si les projections en matière d'accroissement de population se vérifient, l'Allemagne et la France pourraient compter le même nombre d'habitants en 2048, c'est-à-dire à l'horizon 2050. On a vu précédemment qu'à ce moment le nombre de résidents en France métropolitaine devrait s'élever à environ 70 millions.

Annexe : données

Tableau 1 : Population et densité de la France métropolitaine

Année du recense-ment	Population	Densité moyenne (hab/km²)
1968	49 711 853	91,4
1975	52 591 584	96,7
1982		
1990		
1999		107,6
2009	62 465 709	

Source : INSEE, recensements de population

Tableau 2 : Variation démographique intercensitaire

Période inter-censitaire	Variation annuelle moyenne en %	Solde annuel moyen
1968-1974	0,80 %	411 390
1975-1981	0,47 %	
1982-1989		285 036
1990-1998		
1999-2008		

Source : INSEE, recensements de population