Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne | L3 MIASHS
2023/24 | M. Gourdel

Intégration - Probabilités
TD 1

Exercice 1.

1. *Pensez-vous qu'il existe une bijection entre* $\mathbb{R}_+$ *et* $\mathbb{R}$ *?*
2. *Expliquez l'origine de votre intuition.*
3. *Suivant votre intuition,*
   — *Etes vous capable de donner un argument théorique pour expliquer qu'une telle bijection n'existe pas ?*
   — *Etes vous capable de donner explicitement une telle bijection .*

Exercice 2.
Soit X *un ensemble et soit* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *et* $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *deux partitions de* X*, on pose* $C_{i,j} = A_i \cap B_j$*.*

1. *Montrer que pour tout* i*, la famille* $(C_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ *constitue une partition de* A_i*.*
2. *Montrer que pour tout* j*, la famille* $(C_{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ *constitue une partition de* B_j*.*

Exercice 3.
Soit $f : X \to Y$ *une fonction. Démontrer que*

$$\forall B \in \mathcal{P}(Y),\ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X).$$

Que peut-on dire lorsque f *est surjective ?*

Exercice 4.
Soit $f : X \to Y$ *une fonction. Démontrer que*

$$\forall A \in \mathcal{P}(X),\ A \subset f^{-1}(f(A)).$$

Que peut-on dire lorsque f *est injective ?*

Exercice 5.
Soit $f : X \to Y$ *une fonction. Soit* $N \in \mathcal{P}(Y)$*,* $P \in \mathcal{P}(Y)$*. Démontrer les assertions suivantes :*

1. $N \subset P \Rightarrow f^{-1}(N) \subset f^{-1}(P)$.
2. $f^{-1}(N \cup P) = f^{-1}(N) \cup f^{-1}(P)$.
3. $f^{-1}(N \cap P) = f^{-1}(N) \cap f^{-1}(P)$.
4. $f^{-1}(N \setminus P) = f^{-1}(N) \setminus f^{-1}(P)$.

Exercice 6.
Soit E un ensemble dénombrable alors tout sous ensemble est au plus dénombrable.

Exercice 7.
Soit $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

1. *Montrer que F_X est croissante.*
2. *Montrer que en tout point la limite à droite et la limite à gauche existe. On notera $f(x) = \lim_{t \to x^-} F_X(t)$ et $g(x) = \lim_{t \to x^+} F_X(t)$.*
3. *Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*
$$x < y \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq f(y) \leq g(y).$$
4. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$ si et seulement si F_X est continue au point x.*
5. *Soit n un entier strictement positif, on pose $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq g(x) - 1/n\}$ Montrer l'ensemble des points de discontinuités de F_X s'écrit $\cup_{n \geq 1} A_n$.*
6. *Montrer que pour tout n, A_n est un ensemble de cardinal inférieur à n (on commencera par $n = 1$).*
7. *En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de F_X est au plus dénombrable.*
8. *On suppose h croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Adapter le début de l'exercice pour en déduire que sur tout segment $h_{|[a,b]}$ est continue sauf sur un ensemble au plus dénombrable. Conclure que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.*