L1 MIASHS 2015/2016
Université Paris 1

Interrogation de fondements des mathématiques

Questions de cours

1. Démontrer que pour tous ensembles A et B, on a $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
2. Donner un exemple d'ensemble défini sous forme extensive
3. Donner un exemple d'ensemble défini par compréhension.
4. Donner la définition du produit cartésiens de deux ensemble A et B

Exercice 1 Dans les énoncés suivants, remplacer les ? par un quantificateur de telle sorte que l'énoncé soit vrai.

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ ?n \in \mathbb{N} \ x > \dfrac{1}{n}$
2. $[?x \in X \ \forall y \in Y P(x,y)] \ \Rightarrow \ [\forall y \in Y \ \exists x \in X \ P(x,y)]$
3. $\forall X \subset \mathbb{R} \ [X \neq \emptyset \Rightarrow \ ?x \in \mathbb{R} \ x \in X]$
4. $\neg(E \subset F) \ \Rightarrow \ ?x \in E \ x \notin F$
5. $?x \in \mathbb{R} \ ?y \in \mathbb{R} \ x + y = 0$
6. $\forall x \in \mathbb{R} \quad ?y \in \mathbb{R} \ x > y \Rightarrow (?z \in \mathbb{R}_+^* \ x = y + z)$

Exercice 2 Donner la négation des énoncés suivants :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} \ n \geq x$
2. $\exists n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R}_+ \ [x + y \geq n \Rightarrow x \leq 0]$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \ [(x > y) \vee (y > x)]$
4. $\exists n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{Z}[(n \leq m) \Rightarrow (\forall q \in \mathbb{N} \ 2^q \geq n)]$

Exercice 3 Montrer que les propositions suivantes sont des tautologies :

1. $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow r$
2. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$