

DM2

En mathématiques avancées, on utilise souvent des familles d'ensembles pour représenter la structure d'un ensemble. Par exemple, étant donnée un ensemble E , une tribu sur E est une famille non-vide \mathcal{T} de sous-ensembles de E qui est :

- stable par complémentaire: $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$
- stable par union dénombrable ($\forall n \in \mathbb{N} A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$)

1. Donner des exemples de tribus sur \mathbb{N} , sur \mathbb{R} , sur $\{0, 1, 2\}$. *On peut toujours prendre l'ensemble des parties, à vous de trouver d'autres exemples....*

2. Montrer qu'une tribu est stable par intersection dénombrable.

Il s'agit de montrer que ($\forall n \in \mathbb{N} A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$). Pour ce faire, il suffit de remarquer que

$$\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = (\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c)^c$$

puis que:

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} A_n^c \in \mathcal{T}$ car \mathcal{T} stable par complémentaire.
- (b) $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{T}$ car \mathcal{T} stable par union dénombrable.
- (c) $(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{T})^c$ car \mathcal{T} stable par complémentaire.

3. Montrer que si \mathcal{T} est une tribu sur E alors on a nécessairement $E \in \mathcal{T}$. *Si \mathcal{T} est une tribu, elle est non-vide donc il existe $A \subset E$ tel que $A \in \mathcal{T}$. Comme \mathcal{T} est stable par complémentaire, on a aussi $A^c \in \mathcal{T}$. Comme \mathcal{T} est stable par union, on obtient au final $E = A \cup A^c \in \mathcal{T}$.*

Par ailleurs, un clan sur E est une famille non-vide \mathcal{C} de sous-ensembles de E qui est :

- stable par complémentaire: $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$
- stable par intersection $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$

Tous les clans sont-ils des tribus ? *Non ! Par exemple l'ensemble des parties de \mathbb{R} dont les bornes sont rationnelles (ou infinies) est un clan mais pas une tribu.*