Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
2023/24

L3 MIASHS
M. Gourdel

Intégration - Probabilités
TD 2

Exercice 1.
Soit un ensemble Ω, montrer que $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

Exercice 2.
Soit un ensemble Ω, montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (les parties de Ω) est une tribu sur Ω.

Exercice 3. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{F})$ deux espaces mesurés et soit $f : \Omega, \to Y$. On suppose que la tribu $\mathcal{F}$ sur Y est la tribu grossière $\{\emptyset, Y\}$. Montrer que f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(Y, \mathcal{F})$.*

Exercice 4.
Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{F})$ deux espaces mesurés et soit $f : \Omega, \to Y$. On suppose que la tribu sur $\mathcal{A}$ sur Ω est la tribu la plus fine $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(Y, \mathcal{F})$

Exercice 5.
Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$ un ensemble de 4 éléments. On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ qui vaut $\{\{a, b\}, \{a, c\}\}$.

1. *Vérifier que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.*
2. *On pose $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. Montrer que $\{a\} \in \mathcal{A}$, puis que $\{b\} \in \mathcal{A}$, que $\{c\} \in \mathcal{A}$, que $\{d\} \in \mathcal{A}$.*
3. *Montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.*
4. *On suppose que $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur Ω et que l'on connait $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{C}$. Peux-t'on déterminer $\mathbb{P}$ sur $\sigma(\mathcal{C})$?*
   Indication, on pourra regarder le cas où on sait que $\mathbb{P}(\{a, b\}) = 1/2$ et $\mathbb{P}(\{a, c\}) = 1/2$. Peux t'on connaitre $\mathbb{P}$?

Exercice 6.
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{A}'$ la tribu (alternative) associée à la partition $(B_1, \ldots, B_n)$ de Ω. Montrer que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ si et seulement si chaque $B_i \in \mathcal{A}$.
Peut-on généraliser au cas d'une partition dénombrable ?

Exercice 7.
Soit $\Omega = \mathbb{N}$. Si k est un entier, on note $k\mathbb{N}$ l'ensemble des multiples de k. Formellement $k\mathbb{N} = \{0, k, 2k, \ldots\}$. Si A est un sous ensemble de $\mathbb{N}$, on note ici $T_k(A)$ la translation de l'ensemble A à l'aide de la constante k. Par exemple $T_1(2\mathbb{N}) = \{1, 3, 5, \ldots\}$. (On aurait pu le noter $2\mathbb{N} + 1$).

1. *Montrer que $(2\mathbb{N}, T_1(2\mathbb{N}))$ constitue une partition de $\mathbb{N}$. Quelle est la tribu notée $\mathcal{A}$ associée ?*
2. *Montrer que $(3\mathbb{N}, T_1(3\mathbb{N}), T_2(3\mathbb{N}))$ constitue une partition de $\mathbb{N}$. Quelle est la tribu notée $\mathcal{A}'$ associée ?*
3. *On considère la tribu $\mathcal{A}''$ associée à la partition "modulo 6". Montrer par double inclusion que $\mathcal{A}'' = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}')$.*
4. *Interpréter en termes d'informations $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$.*

Exercice 8.

On considère l'ensemble $\Omega = \{0, 1, \ldots, 6\}$ *muni de la tribu* $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,3\}, \{2,4\}, \{5,6\}, \{1,2,3,4\}, \{2,4,5,6\}, \{1,3,5,6\}, \Omega\}.$$

et l'ensemble $Y = \{0, 1, 4, 9, 16\}$, *muni de la tribu*

$$\mathcal{D} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,4\}, \{9,16\}, \{0,1,4\}, \{0,4,9,16\}, \{1,9,16\}, Y\}.$$

puis $f : \Omega \to Y$, *définie par* $f(\omega) = (\omega - 2)^2$.

1. *Justifier que* $\mathcal{A}$ *est une tribu finie sur* Ω *et que* $\mathcal{D}$ *est une tribu finie sur* Y. *Quelles sont les partitions associées ?*

2. *Pour chacun des 8 éléments* $B \in \mathcal{D}$, *déterminer* $f^{-1}(B)$, *ces ensembles sont-ils dans* $\mathcal{A}$ *?*
3. *Vérifier que* f *est mesurable de* $((\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(Y, \mathcal{D})$.
4. *La fonction* f *est-elle mesurable de* $((\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(Y, \mathcal{P}(Y))$ *?*

Compléments sur la notion de tribu image

Exercice 9 (tribu image)**.**

On considère un ensemble Ω *muni d'une tribu* $\mathcal{A}$ *et* $f : \Omega \to Y$, *une fonction. On considère la famille de parties* $\mathcal{C}$ *de* Y *définie par*

$$D \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f^{-1}(D) \in \mathcal{A}.$$

1. *Montrer que* $\emptyset \in \mathcal{C}$.
2. *Montrer que la famille* $\mathcal{C}$ *est stable par passage au complémentaire.*
3. *Montrer que la famille est stable par union dénombrable.*
4. *En déduire que* $\mathcal{C}$ *est une tribu sur l'espace d'arrivée.*
5. *Montrer que* $f \in \mathcal{L}^0((\Omega, \mathcal{A})(Y, \mathcal{C}))$.
6. *On considère* $D \in \mathcal{C}$, *on pose* $A := f^{-1}(D) \in \mathcal{A}$. *Montrer que* $f(A) = D$ *si* f *est surjective.*
7. *On considère le cas particulier* $\Omega = \mathbb{R}$ *muni de la tribu* $\mathcal{A}$ *associée à la partition* $(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*, \{0\})$ *et* $f : \mathbb{R} \to [-4, +\infty[$ *définie par* $f(x) = (x-1)^2 - 4$. *Que vaut alors la famille* $\mathcal{C}$ *?*