Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2020-2021

Contrôle continu 1 - Corrigé

Exercice 1

Montrer que le système suivant a des solutions non nulles si, et seulement si, $\alpha = -3$ ou $\alpha = 3$. Donner alors l'ensemble des solutions.

$$(S_\alpha)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -(2+\alpha)x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & (1-\alpha)y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & (2+\alpha)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Correction : On résoud le système à l'aide du pivot de Gauss :

$$(S_\alpha) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & (2+\alpha)z & = & 0 \\ -2x & + & (1-\alpha)y & - & 2z & = & 0 \\ -(2+\alpha)x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & (2+\alpha)z & = & 0 \\ & - & (3+\alpha)y & - & (6+2\alpha)z & = & 0 \\ & - & (6+2\alpha)y & + & (1-(2+\alpha)^2)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + (2+\alpha)L_1$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & (2+\alpha)z & = & 0 \\ & - & (3+\alpha)y & - & 2(3+\alpha)z & = & 0 \\ & & -2(3+\alpha)y & - & (1+\alpha)(3+\alpha)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & (2+\alpha)z & = & 0 \\ & - & (3+\alpha)y & - & (6+2\alpha)z & = & 0 \\ & & & & [-(1+\alpha)(3+\alpha)+4(3+\alpha)]z & = & 0 \end{array}\right.$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & (2+\alpha)z & = & 0 \\ & - & (3+\alpha)y & - & (6+2\alpha)z & = & 0 \\ & & & & (3-\alpha)(3+\alpha)z & = & 0 \end{array}\right.$$

On voit qu'il y a trois cas à considérer : $\alpha = 3$, $\alpha = -3$ et $\alpha \neq 3, -3$.

Cas $\alpha = 3$ Le système S_3 est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & 5z & = & 0 \\ & - & 6y & - & 12z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & 5z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -2z \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -2, 1))$: il y a donc une infinité de solutions. En particulier, dans ce cas, S_α admet des solutions non nulles.

Cas $\alpha = -3$ Le système S_{-3} est alors équivalent à

$$\begin{cases} x - 2y + z & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \iff z = 2y - x$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(x, y, 2y - x), x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 2))$: il y a donc une infinité de solutions. En particulier, dans ce cas, S_α admet des solutions non nulles.

Cas $\alpha \neq -3, 3$ Le système S_α est alors équivalent à

$$\begin{cases} x & - & 2y & - & (2+\alpha)z & = & 0 \\ & - & (3+\alpha)y & - & (6+2\alpha)z & = & 0 \\ & & & & (3-\alpha)(3+\alpha)z & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & - & 2y & - & (2+\alpha)z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$$

Il y a donc une unique solution : $(0,0,0)$. Le système n'admet pas de solution non nulle dans ce cas

On obtient donc bien que (S_α) admet des solutions non nulles si, et seulement si, $\alpha = 3$ ou $\alpha = -3$.

Exercice 2

On note

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

Correction : On souhaite montrer que, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ceci équivaut à

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui revient à dire que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution du système linéaire homogène suivant :

$$(S) \begin{cases} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

On le résout à l'aide du pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & & 6\lambda_3 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

On obtient que la seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc libre.

Exercice 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Donner la transposée ${}^tA$ de A. Que peut-on dire de A ?

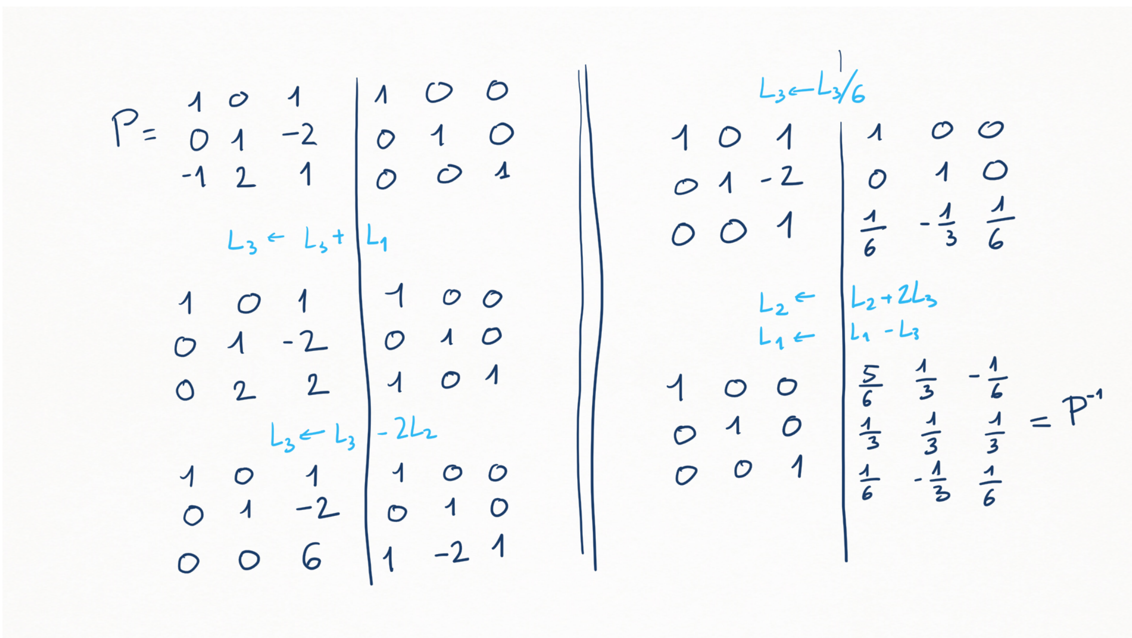
Correction : On trouve

$${}^tA = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = A$$

Autrement dit la matrice A est symétrique.

(b) Calculer l'inverse P^{-1} de P.

Correction : On utilise la méthode de Gauss, ce qui donne



On trouve donc

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Calculer PD et AP, et en déduire que $PDP^{-1} = A$.

Bonus : Comment peut-on en déduire une formule donnant A^n pour $n \in \mathbb{N}$?

Correction : On calcule

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

et d'autre part

$$AP = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc $PD = AP$. En multipliant cette égalité à droite par l'inverse P^{-1} de P, on a donc $PDP^{-1} = APP^{-1} = AI_3 = A$, comme souhaité.

On peut alors calculer facilement A^n pour tout n : On a

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Posons

$$E_3 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = 3X\}, \quad E_{-3} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = -3X\}$$

Montrer que E_3 et E_{-3} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Correction : Montrons que E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Comme vu en cours, on peut écrire les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ comme des matrices colonnes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Montrons que $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_3$. On a :

$$A \cdot 0_{\mathbb{R}^3} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0_{\mathbb{R}^3}$$

  donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E_3$.
- Soient $X, Y \in E_3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $X + \lambda Y \in E_3$. On a, d'après les règles de clacul matriciel

$$\begin{aligned} A(X+\lambda Y) &= AX + \lambda AY \\ &= 3X + \lambda 3Y \text{ car } X \in E_3, Y \in E_3 \\ &= 3(X+\lambda Y). \end{aligned}$$

  Donc $X + \lambda Y \in E_3$.

$\boxed{\rightsquigarrow}$ E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

De même, montrons que E_{-3} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_{-3}$. On a :

$$A \cdot 0_{\mathbb{R}^3} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \cdot 0_{\mathbb{R}^3}$$

  donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-3}$.
- Soient $X, Y \in E_{-3}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $X + \lambda Y \in E_{-3}$. On a, d'après les règles de clacul matriciel

$$\begin{aligned} A(X+\lambda Y) &= AX + \lambda AY \\ &= -3X - \lambda 3Y \text{ car } X \in E_{-3}, Y \in E_{-3} \\ &= -3(X+\lambda Y). \end{aligned}$$

  Donc $X + \lambda Y \in E_{-3}$.

$\rightsquigarrow$ E_{-3} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(e) Donner $E_3 \cap E_{-3}$. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Correction : L'intersection de deux sous-espaces vectoriel étant un sous espace vectoriel, on sait déjà que $E_3 \cap E_{-3}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On a donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E_3 \cap E_{-3}$. D'un autre côté, soit $X \in E_3 \cap E_{-3}$. Alors

$$\begin{cases} X \in E_3 \\ X \in E_{-3} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} AX = 3X \\ AX = -3X \end{cases} \text{ donc } 3X = -3X \text{ donc } 6X = 0_{\mathbb{R}^3}$$

donc $X = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a donc $\boxed{E_3 \cap E_{-3} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$ (qui est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$).