Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2019-2020

CC1

Durée : 1h

Question de cours

A quelle condition une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ?
Dans ce cas, quel est son inverse ?

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En fonction des valeurs de α, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + \alpha z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ \alpha x + y + z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}),\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

1. Calculer BA, AC et BAC.
2. Calculer A^2 et A^3.
3. Calculer $A^3 - 4I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 3

Soient D et $D' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonales :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad D' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

1. Pour $n = 4$, calculer DD'.
2. Toujours pour $n = 4$, en déduire D^p pour $p \in \mathbb{N}$.
3. Qu'obtient-on pour n quelconque ?