Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire **CC1 - Rattrapage**
Année 2019-2020 **Corrigé**

Question de cours

Donner la définition d'une matrice inversible.
Calculer l'inverse de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Corrigé : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$. On dit alors que B est l'inverse de A. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, en utilisant la formule pour l'inverse des matrices de taille 2×2, on obtient
$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En fonction des valeurs de α, résoudre le système :
$$\begin{cases} x + y + \alpha z & = 1 \\ x + \alpha y + z & = 1 \\ \alpha x + y + z & = 1 \end{cases}$$

Corrigé : Via l'algorithme du pivot de Gauss, on obtient :
$$\begin{cases} x + y + \alpha z & = 1 \\ x + \alpha y + z & = 1 \\ \alpha x + y + z & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \alpha z & = 1 \\ \quad (\alpha - 1)y + (1-\alpha)z & = 0 \\ \quad (1-\alpha)y + (1-\alpha^2)z & = 1 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \alpha z & = 1 \\ \quad (\alpha - 1)y + (1-\alpha)z & = 0 \\ \qquad (2 - \alpha - \alpha^2)z & = 1 - \alpha \end{cases}$$
Les solutions du système vont donc dépendre des racines du polynôme $2 - \alpha - \alpha^2$. On trouve que le discriminant est 9, d'où $2 - \alpha - \alpha^2 = -(\alpha - 1)(\alpha + 2)$. Donc

- Si $\alpha = 1$, le système équivaut à $x + y + z = 1$, autrement dit, en prenant y et z comme paramètres, $x = 1 - y - z$. Il y a donc une infinité de solutions données par
$$\mathcal{S} = \{(1 - y - z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\}.$$
- Si $\alpha = -2$, le système équivaut à
$$\begin{cases} x \quad + y \quad + \alpha z & = 1 \\ \quad (\alpha - 1)y + (1-\alpha)z & = 0 \\ \qquad\qquad 0 & = 3 \end{cases}$$
La dernière ligne est une contradiction : le système n'admet donc aucune solution dans ce cas.
- Si $\alpha \neq 1, -2$, le système équivaut à
$$\begin{cases} x \quad + y \quad + \alpha z & = 1 \\ \quad (\alpha - 1)y + (1-\alpha)z & = 0 \\ \qquad (\alpha + 2)z & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \alpha z & = 1 \\ \quad y \ - z & = 0 \\ \qquad z & = \frac{1}{\alpha+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{1}{\alpha+2} \\ y & = \frac{1}{\alpha+2} \\ z & = \frac{1}{\alpha+2} \end{cases}$$
et il y a donc une unique solution.

Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

1. Calculer BA, CB et CBA.
2. Calculer A^2, puis $A^2 + A$.
3. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Corrigé

1. $BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $CB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $CBA = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$
2. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$
3. On a donc $A^2 + A = 2I_3$. Donc $\frac{1}{2}A(A + I_3) = \frac{1}{2}(A + I_3)A = I_3$ donc A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

1. Supposons pour commencer que $A^3 = 0$. Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2)$.
2. En déduire que $I_n - A$ est inversible. Quel est son inverse ?
3. On suppose maintenant qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Montrer que

$$(I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k = I_n$$

Indication : Penser à utiliser la distributivité.

Corrigé

1. $(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_n + A + A^2 - AI_n - A^2 - A^3 = I_n - A^3 = I_n$ puisque, par hypothèse, $A^3 = 0$.
2. On a de même $(I_n + A + A^2)(I_n - A) = I_n$ donc $I_n - A$ est inversible, d'inverse $I_n + A + A^2$.
3. On a

$$\begin{aligned}(I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k &= \sum_{k=0}^{p-1} A^k - A\sum_{k=0}^{p-1} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} A^k - \sum_{k=0}^{p-1} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k - \sum_{j=1}^{p} A^j \\ &= I_n - A^p = I_n,\end{aligned}$$

puisque $A^p = 0$ par hypothèse. On en déduit que $I_n - A$ est inversible, d'inverse $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$. (Il y a là une analogie avec la somme d'une suite géométrique !)