Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L1 MIASHS 2021-2022
Algèbre Linéaire 1

Epreuve de première session - Corrigé

Durée : 2h.
Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
La précision de l'argumentation sera une part importante dans l'évaluation.
Montrez-moi ce que vous savez faire !

Exercice 1 (/11 points)

1. **(/ 1.5 pts)** Montrer que la famille suivante est une base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathscr{B}_1 = (v_1 = (-1,0,3), v_2 = (-2,1,0), v_3 = (-1,1,-5))$$

Corrigé : Il y a plusieurs façons de s'y prendre. On peut observer que $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_1) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc il suffit de montrer que $\mathscr{B}_1$ est libre *ou* qu'elle est génératrice.

$\mathscr{B}_1$ est libre : Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ceci équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & & & - & 5\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 6\lambda_2 & - & 8\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0$. Donc $\mathscr{B}_1$ est libre.

$\mathscr{B}_1$ est génératrice : Soit $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, montrons qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = u$. C'est le cas ssi le système suivant a des solutions :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & a \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & b \\ 3\lambda_1 & & & - & 5\lambda_3 & = & c \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrl} -\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = a \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = b \\ & - & 6\lambda_2 & - & 8\lambda_3 & = c \quad +3a \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L-3 + 6L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrl} -\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = a \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = b \\ & & & - & 2\lambda_3 & = c \quad +3a + 6b \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 & = -\frac{5a+10b+c}{2} \\ \lambda_2 & = \frac{3a+8b+c}{2} \\ \lambda_3 & = -\frac{3a+6b+c}{2} \end{array}\right.$$

$\rightsquigarrow$ Le système a des solutions pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, donc $\mathscr{B}_1$ est génératrice.

Commentaire : Il ne suffit pas de poser et résoudre les bons systèmes : il faut aussi justifier d'où ils sortent !

Pour montrer que $\mathscr{B}_1$ est une base, on peut aussi utiliser le déterminant. On calcule

$$\det(v_1,v_2,v_3)=\begin{vmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -5\end{vmatrix}\underset{C_3\leftarrow C_3-C_2}{=}\begin{vmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -5\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -5\end{vmatrix}=2$$

donc $\det(v_1,v_2,v_3)\neq 0$, donc c'est une famille libre.
Comme $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_1)=3=\dim(\mathbb{R}^3)$, c'est une base.

Commentaire : Pour justifier que $\{v_1,v_2,v_3\}$ est libre, il ne suffit pas de dire qu'ils sont tous différents du vecteur nul (ce critère ne marche que pour les familles à 1 vecteur) ni qu'ils sont deux à deux non colinéaires (ce critère ne marche que pour les familles à 2 vecteurs)

2. On considère les sous-espaces vectoriels suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$F_1=\mathrm{Vect}(v_1=(-1,0,3),v_2=(-2,1,0),w=(0,1,-6))$$
$$F_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y=0, x-4y-z=0\}$$

(a) **(/ 3 pts)** Déterminer une base et la dimension de F_1 et F_2.
(b) **(/ 2 pts)** Montrer que $\mathbb{R}^3=F_1\oplus F_2$.

Corrigé :

(a) *Base et dimension de F_1.*
Par définition du s.e.v. engendré par une famille de vecteurs, $\{v_1,v_2,w\}$ est une famille génératrice de F_1. Déterminons si elle est libre.
Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3w=0_{\mathbb{R}^3}$. Ceci équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl}-\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & & & = & 0\\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ 3\lambda_1 & & & - & 6\lambda_3 & = & 0\end{array}\right.\underset{L_3\leftarrow L_3-3L_1}{\iff}\left\{\begin{array}{rcrcrcl}-\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & & & = & 0\\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & - & 6\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+6L_2}{\iff}\left\{\begin{array}{rcrcrcl}-\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & & & = & 0\\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff\begin{cases}\lambda_1=2\lambda_3\\ \lambda_2=-\lambda_3\end{cases}$$

Pour $\lambda_3=1$ on obtient une solution non nulle, qui donne $2v_1-v_2+w=0$. Donc la famille est liée et ce n'est pas une base de F_1.

Remarque : On peut observer à l'oeil nu que $w=v_2-2v_1$ et arriver directement à la conclusion.

On en déduit que, puisque w est combinaison linéaire de v_1,v_2, on a $F_1=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$. Donc $\{v_1,v_2\}$ est une famille génératrice de F_1, et, puisque v_1 et v_2 sont non colinéaires, c'est une famille libre.
Donc $\boxed{(v_1,v_2)\text{ est une base de } F_1 \text{ et } \dim F_1=2}$.

Base et dimension de F_2.
Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, alors

$$u\in F_2\iff\begin{cases}x+y&=0\\ x-4y-z&=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+y&=0\\ -5y-z&=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-y\\ z=-5y\end{cases}$$
$$\iff u=(-y,y,-5y)=y(-1,1,-5)\in\mathrm{Vect}((-1,1,5))$$

Donc $F_2 = \text{Vect}((-1,1,-5)) = \text{Vect}(v_3)$. De plus, $v_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $\{v_3\}$ est une famille libre.
Donc $\boxed{(v_3) \text{ est une base de } F_2 \text{ et } \dim F_2 = 1}$.

(b) Montrons que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.

Méthode 1 : On a obtenu en 2(a) que $\mathscr{B}_{F_1} = (v_1, v_2)$ est une base de F_1, $\mathscr{B}_{F_2}(v_3)$ est une base de F_2, et on a vu en (1) que $\mathscr{B}_{F_1} \cup \mathscr{B}_{F_2} = \mathscr{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc l'union d'une base de F_1 et d'une base de F_2 donne une base de $\mathbb{R}^3$: donc $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.

Méthode 2 : Avec la définition de la somme directe :

- Montrons que $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Soit $u = (x,y,z) \in F_1 \cap F_2$. Alors $u \in F_1$ donc il existe λ_1, λ_2 tels que $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (-\lambda_1 - 2\lambda_2, \lambda_2, 3\lambda_1)$. D'autre part $u \in F_2$, donc $x + y = 0$ et $x - 4y - z = 0$. En mettant les deux ensemble :
$$\begin{cases} (-\lambda_1 - 2\lambda_2) + \lambda_2 & = 0 \\ (-\lambda_1 - 2\lambda_2) - 4\lambda_2 - 3\lambda_1 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ -4\lambda_1 - 6\lambda_2 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ -2\lambda_2 & = 0 \end{cases}$$
ce qui donne bien $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, d'où $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a donc bien $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- Montrons que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$.
On sait que $F_1 + F_2$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, tel que
$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$
donc $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$

Remarque : On peut aussi le faire à la main, par analyse-synthèse, mais ça pique un peu. Voir Annexe en bas du corrigé.

3. **(/ 1.5 pts)** Montrer que la famille suivante est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
$$\mathscr{B}'_1 = \left(Q_1(X) = 3X^2 - 1, Q_2(X) = X - 2, Q_3(X) = -5X^2 + X - 1\right)$$

Corrigé : Comme précédemment, il y a plusieurs méthodes. On peut observer que
$$\text{Card}(\mathscr{B}'_1) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$$
donc $\mathscr{B}'_1$ est une base ssi elle est libre ssi elle est génératrice.

- **Méthode 1** : On note $\mathscr{B}' = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors
$$[Q_1]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = v_1, [Q_2]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2, [Q_3]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = v_3$$
Or, on a vu que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, donc (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.
- **Méthode 2 :** Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$, c'est à dire
$$\begin{aligned} & \lambda_1(3X^2 - 1) + \lambda_2(X - 2) + \lambda_3(-5X^2 + X - 1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ \iff & (3\lambda_1 - 5\lambda_3)X^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)X + (-\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \end{aligned}$$

Or, un polynôme est égal au polynôme nul ssi tous ses coefficients sont nuls, ce qui donne le système

$$\begin{cases} -\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & & & - & 5\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

...qu'on a déjà résolu en 1. (tiens donc !). On a vu que la seule solution est $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0$. Donc $\mathscr{B}'_1$ est libre.

- **Méthode 3** : Montrons que $\mathscr{B}'_1$ est génératrice : Soit $P(X) = aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$, montrons qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = P$, autrement dit
$$(3\lambda_1 - 5\lambda_3)X^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)X + (-\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3) = aX^2 + bX + c$$
. C'est le cas ssi le système suivant a des solutions :

$$\begin{cases} -\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & c \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & b \\ 3\lambda_1 & & & - & 5\lambda_3 & = & a \end{cases}$$

On a déjà résolu ce système en 1. et obtenu qu'il avait des solutions pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, donc $\mathscr{B}'_1$ est génératrice.

4. On considère les sous-ensembles suivants dans $\mathbb{R}_2[X]$:

$$G_1 = \mathrm{Vect}(Q_1(X) = 3X^2 - 1, Q_2(X) = X - 2)$$
$$G_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) + P'(0) = 0, P(1) = 2P(0) - 3P'(0)\}$$

(a) **(/ 2 pts)** Montrer que G_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, puis que $G_2 = \mathrm{Vect}(Q_3)$.

(b) **(/ 1 pts)** En déduire que $\mathbb{R}_2[X] = G_1 \oplus G_2$.

Corrigé :

(a) Montrons que G_2 est un s.e.v. :

- Si $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ alors $P(1) = P(0) = 0$ et $P'(X) = 0$ donc $P'(0) = 0$ et on a
$$\left. P(0) + P'(0) = 0 P(1) = 2P(0) - 3P'(0) \right\} \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \in G_2$$
- Soient $P_1, P_2 \in G_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $P_1 + \lambda P_2 \in G_2$. On a d'une part
$$(P_1 + \lambda P_2)(0) + (P_1 + \lambda P_2)'(0) = \underbrace{P_1(0) + P_1'(0)}_{=0} + \lambda(\underbrace{P_2(0) + P_2'(0)}_{=0}) = 0$$
Et d'autre part
$$\begin{aligned}(P_1 + \lambda P_2)(1) &= P_1(1) + \lambda P_2(1) = 2P_1(0) - 3P_1'(0) + \lambda(2P_2(0) - 3P_2'(0)) \\ &= (P_1 + \lambda P_2)(0) + (P_1 + \lambda P_2)'(0)\end{aligned}$$
donc $P_1 + \lambda P_2 \in G_2$

Donc G_2 est bien un s.e.v. Montrons que $G_2 = \mathrm{Vect}(Q_3)$.

$\boxed{\supset}$ Remarquons que $Q_3(0) = -1, Q_3(1) = -5$ et $Q_3'(X) = -10X+1$ donc $Q_3'(0) = 1$. Donc $Q_3(0) + Q_3'(0) = -1 + 1 = 0$ et

$$Q_3(1) = -5, 2Q_3(0) - 3Q_3'(0) = -2 - 3 = -5 \text{ donc } Q_3(1) = 2Q_3(0) - 3Q_3'(0)$$

Donc $Q_3 \in G_2$; or $\mathrm{Vect}(Q_3)$ est le plus petit s.e.v. qui contient Q_3, d'où $\boxed{\mathrm{Vect}(Q_3) \subset G_2}$.

Commentaire : Ca ne suffit pas pour montrer que ces deux ensembles sont égaux ! Et d'ailleurs, si on montre juste que $Q_3 \in G_2$, il faut aussi justifier comment on en déduit l'inclusion $\mathrm{Vect}(Q_3) \subset G_2$.

$\boxed{\subset}$ Inversement, soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors

$$P(0) = c, P(1) = a + b + c, P'(0) = b$$

donc

$$P \in G_2 \iff \begin{cases} b + c = 0 \\ a + b + c = 2a - 3b \end{cases} \iff \begin{cases} b + c = 0 \\ -a + 4b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -b \\ a = -5b \end{cases}$$

ce qui donne $P(X) = -5bX^2 + bX - b = bQ_3(X)$ donc $P \in \mathrm{Vect}(Q_3)$. D'où $\boxed{G_2 \subset \mathrm{Vect}(Q_3)}$.

(b) D'une part, Q_1 et Q_2 ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc $\mathscr{B}_{G_1} = (Q_1; Q_2)$ est une base de G_1.
D'autre part, $Q_3 \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ donc c'est une base de G_2.
Enfin, on a montré en 3. que (Q_1, Q_2, Q_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
$\rightsquigarrow$ L'union d'une base de G_1 et d'une base de G_2 donne une base de $\mathbb{R}_2[X]$: donc $\boxed{\mathbb{R}_2[X] = G_1 \oplus G_2}$.

Exercice 2 (/7 points) On considère l'application

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (4x + 10y + z, -y, -15x - 30y - 4z) \in \mathbb{R}^3$$

1. **(/ 1 pts)** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   Corrigé : Montrons que f est linéaire. Soient $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$. On calcule

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= \begin{pmatrix} 4(x + \lambda x') + 10(y + \lambda y') + (z + \lambda z') \\ -(y + \lambda y') \\ -15(x + \lambda x') - 30(y + \lambda y') - 4(z + \lambda z') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x + 10y + z + \lambda(4x' + 10y' + z') \\ -y - \lambda y' \\ -15x - 30y - 4z + \lambda(-15x' - 30y' - 4z') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x + 10y + z \\ -y \\ -15x - 30y - 4z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4x' + 10y' + z' \\ -y' \\ -15x' - 30y' - 4z' \end{pmatrix} \\ &= f(u) + \lambda f(v) \end{aligned}$$

   donc f est linéaire, et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a le même e.v. de départ et d'arrivée, donc c'est un endomorphisme.

Commentaire : Ne pas oublier de montrer que f est linéaire ! Ca se voit, je suis d'accord, mais il faut au moins le dire pour montrer que vous savez ce que signifie endormorphisme.

Par contre, il n'est pas nécessaire à ce stade de montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$: un endomorphisme d'un e.v. E n'est pas forcément surjectif. Il est défini sur E *à valeurs dans* E, mais il n'est pas nécessaire que tout élément de E est un antécédent par f.

2. **(/ 2.5 pts)** Déterminer $\dim \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$. Est-ce que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Corrigé : Commençons par déterminer $\mathrm{Ker}(f)$:

$$u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} 4x + 10y + z &= 0 \\ -y &= 0 \\ -15x - 30y - 4z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x + z &= 0 \\ y &= 0 \\ -15x - 4z &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1}{\iff} \begin{cases} 4x + z &= 0 \\ y &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y = z = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. On en déduit que $\boxed{\dim \mathrm{Ker}(f) = 0}$ et que f est injective.

Par le théorème du rang, on a

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 0 = 3}.$$

Par conséquent, $\mathrm{Im}(f)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ de dimension $\mathrm{rg}(f) = 3$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ et f est surjective.

(Voir Annexe 2 en bas du document pour une autre approche).

$\rightsquigarrow$ f est injective et surjective, donc bijective. Donc $\boxed{f \text{ est un isomorphsime de } \mathbb{R}^3}$.

3. **(/ 1 pts)** Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.

Corrigé : On note $\mathscr{B}_0 = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et on calcule

$$\left.\begin{aligned} f(e_1) &= (4, 0, -15) = 4e_1 + 0e_2 - 15e_3 \\ f(e_2) &= (10, -1, -30) = 10e_1 - e_2 - 30e_3 \\ f(e_3) &= (1, 0, -4) = e_1 + 0e_2 - 4e_3 \end{aligned}\right\} A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -15 & -30 & -4 \end{pmatrix}$$

4. **(/ 1 pts)** Calculer A^2. Que peut-on en déduire sur f ?

Corrigé : On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -15 & -30 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -15 & -30 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

On en déduit que $[f]^2_{\mathscr{B}_0} = [f \circ f]_{\mathscr{B}_0} = I_3 = [id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathscr{B}_0}$ donc, par unicité de la représentation matricielle, on en déduit que $f \circ f = id_{\mathbb{R}^3}$.

Remarque : Ce n'était pas demandé, mais on en déduit que f est une symétrie.

5. **(/ 1.5 pts)** Donner la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ de l'exercice 1.

Corrigé : Il y a deux méthodes :

- **Avec la définition :** On calcule

$$\left.\begin{array}{l} f(v_1) = (-1,0,3) = v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ f(v_2) = (2,-1,0) = -v_2 = 0v_1 - v_2 + 0v_3 \\ f(v_3) = (1,-1,5) = -v_3 = 0v_1 + 0v_2 - 4v_3 \end{array}\right\} [f]_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Commentaire : Ici, il ne suffit donc pas de calculer $f(v_1), f(v_2)$ et $f(v_3)$ puis de les mettre en colonne ! Il nous faut les coordonnées de $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ dans la base (v_1, v_2, v_3), et pas dans la base canonique (e_1, e_2, e_3).

- **Avec la formule de changement de base :** La matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}_1$ est

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

  On calcule (voir page suivante)

$$P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 10 & 1 \\ -3 & -8 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

  D'où

$$\begin{aligned} [f]_{\mathscr{B}_1} = P^{-1}AP &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 10 & 1 \\ -3 & -8 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -15 & -30 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 10 & 1 \\ -3 & -8 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3, L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow -L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Exercice 3 (/4 points) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soient H_1, H_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim H_1 = \dim H_2 = n-1$ et $H_1 \neq H_2$.

1. **(/ 1.5 pts)** Justifier qu'il existe un vecteur $v \in H_2 \setminus H_1$. Montrer que $E = H_1 \oplus \mathrm{Vect}(v)$.
2. **(/ 1 pts)** Montrer que $E = H_1 + H_2$. En déduire $\dim(H_1 \cap H_2)$.
3. **(/ 1.5 pts)** Soient deux applications linéaires $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ de rang 1.
   On suppose qu'il existe $v \in E$ tel que $f_1(v) = 0$ et $f(v) = 2$.
   Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2))$.

Corrigé :

1. Supposons, par l'absurde que $H_2 \setminus H_1 = \emptyset$, autrement dit il n'existe pas de vecteurs qui sont dans H_2 et pas dans H_1. Ce qui revient à dire que tout vecteur de H_2 appartient à H_1, i.e. $H_2 \subset H_1$.
   Mais comme par hypothèse $\dim H_2 = \dim H_1$, on aurait alors $H_2 = H_1$, ce qui contredit l'hypothèse $H_2 \neq H_1$.
   Donc $H_2 \setminus H_1 \neq \emptyset$. Il existe donc $v \in H_2 \setminus H_1$.

   Commentaire : Ici, il ne suffit pas d'utiliser l'hypothèse $H_1 \neq H_2$, car on pourrait très bien avoir $H_2 \subsetneq H_1$, par exemple

   $$E = \mathbb{R}^3, H_1 = \mathrm{Vect}((1,0,37.5)), H_2 = \mathrm{Vect}((1,0,37.5),(42,42,42))$$

   $\rightsquigarrow$ L'autre hypothèse est importante aussi pour conclure !

   Montrons que $E = H_1 \oplus \mathrm{Vect}(v)$.
   - Montrons que $H_1 \cap \mathrm{Vect}(v) = \{0_E\}$.
     Soit $u \in H_1 \cap \mathrm{Vect}(v)$. Alors $u \in \mathrm{Vect}(v)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$. Si $\lambda \neq 0$ alors on a $u \in H_1$ donc, puisque H_1 est un s.e.v., $v = \frac{1}{\lambda}u \in H_1$, ce qui contredit la construction de v.
     $\rightsquigarrow$ On a donc $\lambda = 0$, donc $u = 0v = 0_E$.
   - Montrons que $E = H_1 + \mathrm{Vect}(v)$.
     On sait que

     $$\dim(H_1 + \mathrm{Vect}(v)) = \dim H_1 + \dim(\mathrm{Vect}(v)) - \dim(H_1 \cap \mathrm{Vect}(v))$$

     Or, puisque $v \notin H_1$, on a $v \neq 0_E$ donc $\dim \mathrm{Vect}(v) = 1$, ce qui donne $\dim(H_1 + \mathrm{Vect}(v)) = n - 1 + 1 - 0 = n = \dim E$.
     Donc $H_1 + \mathrm{Vect}(v)$ est un s.e.v. de dimension n dans E, donc $H_1 + \mathrm{Vect}(v) = E$.
2. Montrons que $E = H_1 + H_2$.
   Soit $u \in E$. D'après 1., $u \in H_1 + \mathrm{Vect}(v)$ donc il existe $w_1 \in H_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $u = w + \lambda v$.
   Or $v \in H_2$ et H_2 est un s.e.v. donc $\lambda v \in H_2$.
   On a donc montré que pour tout $u \in E$, il existe $w_1 \in H_1$ et $w_2 = \lambda v \in H_2$ tels que $u = w_1 + w_2 \in H_1 + H_2$. On a donc bien $\boxed{E = H_1 + H_2}$.

   Or on a

   $$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

   donc, d'après ce qu'on vient de montrer,

   $$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(E) = (n-1) + (n-1) - n = n-$$

3. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\operatorname{Ker} f_1) = \dim E - \operatorname{rg}(f_1) = n-1, \dim(\operatorname{Ker} f_2) = \dim E - \operatorname{rg}(f_2) = n-1$$

De plus, on a un vecteur v tel que $f_1(v) = 0$, donc $v \in \operatorname{Ker}(f_1)$, et $f_2(v) = 2$, donc $v \notin \operatorname{Ker}(f_2)$. Donc $\operatorname{Ker} f_1$ et $\operatorname{Ker} f_1$ sont deux s.e.v distincts de dimension $n-1$ dans E. Donc, par 2., $\boxed{\dim(\operatorname{Ker}(f_1) \cap \operatorname{Ker}(f_2)) = n-2}$.

Annexe : Corrigé alternatif Exercice 1 Question 2(b)

Montrons que $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2$. Soit $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on cherche $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in F_1$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F_2$ tels que $u = u_1 + u_2$. On procède par analyse-synthèse.

Analyse Supposons que u_1, u_2 existent. Alors on a

$$\begin{cases} u_1 \in F_1 = \operatorname{Vect}(v_1, v_2) \\ u_2 \in F_2 \\ u = u_1 + u_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = \alpha v_1 + \beta v_2 = (-\alpha - 2\beta, \beta, 3\alpha) \\ x_2 + y_2 = 0, x_2 - 4y_2 - z_2 = 0 \\ (a,b,c) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \end{cases}$$

mais du coup,

$$\begin{cases} a + b & = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = x_1 + y_1 + \underbrace{x_2 + y_2}_{=0} \\ a - 4b - c & = (x_1 + x_2) - 4(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = x_1 - 4y_1 - z_1 + \underbrace{x_2 - 4y_2 - z_2}_{=0} \end{cases}$$

donc, en utilisant $u_1 = (-\alpha - 2\beta, \beta, 3\alpha)$,

$$\begin{cases} (-\alpha - 2\beta) + \beta & = a + b \\ (-\alpha - 2\beta) - 4\beta - 3\alpha & = a - 4b - c \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta & = -(a+b) \\ 4\alpha + 6\beta & = a - 4b - c \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & = -\frac{5a+10b+c}{2} \\ \beta & = \frac{3a+8b+c}{2} \end{cases}$$

Ce qui donne $u_1 = -\frac{5a+10b+c}{2} v_1 + \frac{3a+8b+c}{2} v_2$ et donc

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a+6b+c}{2} \\ \frac{3a+8b+c}{2} \\ -\frac{15a+30+3c}{2} \end{pmatrix}, u_2 = u - u_1 = \begin{pmatrix} \frac{3a+6b+c}{2} \\ -\frac{3a+6b+c}{2} \\ \frac{15a+30b+5c}{2} \end{pmatrix}$$

Synthèse : On pose u_1, u_2 comme ci-dessus et on vérifie que $u_1 \in F_1, u_2 \in F_2$ et $u_1 + u_2 = u$.

- $u_1 = -\frac{5a+10b+c}{2} v_1 + \frac{3a+8b+c}{2} v_2 \in \operatorname{Vect}(v_1, v_2) = F_1$
- $u_2 = -\frac{3a+6b+c}{2} \underbrace{(-1,1,5)}_{\in F_2} \in F_2$
- $u_1 + u_2 = (a,b,c) = u$.

Donc on a bien $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$.

Annexe 2 : Corrigé alternatif Exercice 2 Question 2

Une autre façon de déterminer $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$ est la suivante. Notons $\mathscr{B}_0 = \left(e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

C'est en particulier une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, donc

$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^3) = f(\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

On calcule

$$f(e_1) = (4, 0, -15), f(e_2) = (10, -1, -30), f(e_3) = (1, 0, -4)$$

Comme on l'a dit, $\{f(e_1) = (4, 0, -15), f(e_2) = (10, -1, -30), f(e_3) = (1, 0, -4)\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Pour trouver $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$, on regarde si c'est une famille libre.

Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 4\lambda_1 + 10\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 &= 0 \\ -15\lambda_1 - 30\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 4\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ -15\lambda_1 - 4\lambda_3 &= 0 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1}{\iff} \begin{cases} 4\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \end{cases} \\
&\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}$$

Donc $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est libre : c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et on a donc $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 3}$.

Remarque : Le système qu'on a résolu est le même que celui qui permet de déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. C'est normal, puisque, par linéarité de f,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \in \mathrm{Ker}(f) \\
&\iff (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathrm{Ker}(f).
\end{aligned}$$