Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L1 MIASHS 2023-2024
Algèbre linéaire 1

TD1 : Systèmes linéaires

Méthode du pivot de Gauss

Exercice 1 Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & -2 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 4y & - & z & = & 2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ x & + & 4y & - & z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 2 Résoudre les systèmes suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & & + & 2z & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & - & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 5z & = & 13 \\ x & + & 4y & + & z & = & 18 \end{array}\right.$$

Systèmes à paramètres

Exercice 3 Résoudre suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & \alpha y & = & -3 \\ \alpha x & + & 4y & = & 6 \end{array}\right.$$

Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

Exercice 4 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ le système d'équations suivant admet-il une solution unique ? Aucune solution ? Une infinité de solution ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & \alpha z & = & 3 \\ x & + & \alpha y & + & 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercices complémentaires

Exercice 5 Donner, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 2 \\ x & - & \alpha y & = & \alpha \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} \alpha x & + & (1-\alpha)y & = & \alpha \\ \alpha x & + & \alpha y & = & \alpha \end{array}\right.$$

Exercice 6 Déterminer tous les polynômes de degré 2, $P = ax^2 + bx + c$, tels que

1. $P(-1) = 5, P(1) = 1$ et $P(2) = 2$
2. $P(-1) = 4$ et $P(2) = 1$

Exercice 7 Trouver un polynôme de degré 3 tel que

$$P(X+1) - P(X) = X^2$$

En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 8 Résoudre le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 & = 1 \\ x^4y^5z^{12} & = 2 \\ x^2y^2z^5 & = 3 \end{cases}$$

Exercice 9 Représenter les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x+y<1\right\} \\ A_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ |x+y|<1\right\} \\ A_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ |x|+|y|<1\right\} \\ A_4 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x+y>-1\right\} \\ A_5 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ |x-y|<1\right\} \\ A_6 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x^2+y^2<1\right\} \end{aligned}$$