

TD5 : APPLICATIONS LINÉAIRES

Applications linéaires : exemples

Exercice 1 Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x^2 - y^2)$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (y, x, 0)$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (y, x, 1)$
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + |y|$
- $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(P) = P'(0)$.

Pour celles qui sont linéaires :

- Donner une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$. En déduire $\text{rg } f$.
- Déterminer si f est injective, surjective ou bijective.

Exercice 2 Pour quelle(s) valeur(s) de α l'application suivante est-elle linéaire ?

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto ((\alpha + 2)xy, -\alpha z) \in \mathbb{R}^2$$

Pour cette valeur de α , donner $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \mapsto (3x + y + z, x + y, -4x - 2y - z, 6x + 4y + \alpha z)$$

1. Déterminer, suivant les valeurs de α , le noyau de f_α .
2. En déduire, dans chaque cas, le rang de f_α .
3. Donner, suivant les valeurs de α , une base de $\text{Im } f_\alpha$.

Exercice 4 Soit $n \geq 2$, on pose

$$f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto f(P) = P(1)X + P(0)(X^2 - 4).$$

Montrer que f est linéaire et trouver les dimensions de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$.

Exercices théoriques

Exercice 5 Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

1. Montrer que $f^{-1}(f(F)) = F + \text{Ker } f$.
2. Montrer que $f(f^{-1}(F)) = F \cap \text{Im } f$.

Exercice 6 On considère E un \mathbb{R} - espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f)$.

1. Montrer que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$.
2. Prouver que $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E$.

Exercice 7 Soient E et F deux \mathbb{R} - espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

$$f(A) \subset f(B) \iff A + \text{Ker } f \subset B + \text{Ker } f$$

Exercices complémentaires

Exercice 8 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ f = \text{Id}_E$. On dit que f est une *symétrie* de E .

1. Montrer que $\text{Ker } f = \{0_E\}$ et $\text{Im } f = E$.
2. Montrer que $F = \{x \in E \mid f(x) = x\} = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $G = \{x \in E \mid f(x) = -x\} = \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .
3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (z, -y, x)$.
 - (a) Montrer que f est une symétrie de \mathbb{R}^3 .
 - (b) Déterminer une base de $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et une base de $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.

Exercice 9 1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . On définit :

$$\begin{array}{ll} p_F : E = F \oplus G \rightarrow E & p_G : E = F \oplus G \rightarrow E \\ u = v + w \mapsto v & u = v + w \mapsto w \end{array}$$

On dit que p_F est la projection sur F parallèlement à G et p_G est la projection sur G parallèlement à F

- (a) Montrer que $\text{Ker } p_F = G$, $\text{Im } p_F = F$.
 - (b) Montrer que $p_F \circ p_F = p_F$.
 - (c) Montrer que $p_G = \text{Id} - p_F$.
2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = f$ et $\text{Ker } f \neq \{0_E\}$.
 - (a) Montrer que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$.
 - (b) Montrer que f est la projection sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Ker } f$.
 - (c) Soit $g = \text{Id}_E - f$. Déterminer $\text{Im } g$ et $\text{Ker } g$.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (z, y, z)$.
- Calculer $f \circ f$.
 - Trouver une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.
 - Trouver deux sous-espaces supplémentaires F et G tels que f soit la projection sur F parallèlement à G .

Exercice 10 Soient E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $f \circ g = \text{Id}_F$.

- Montrer que $\text{Ker } g = \{0_F\}$ et $\text{Im } f = F$.
- Montrer que $g \circ f$ est une projection de E .
- Montrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.
- Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker } f$.
- Dans quel cas peut on dire que f est inversible ?

Exercice 11 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'alors, pour tout $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$, la famille

$$\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$$

est une base de E .

Exercice 12 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soient deux applications ϕ et ψ de E dans E définies par $\phi(P) = P'$ et $\psi(P) = XP$, pour tout $P \in E$.

- Montrer que ϕ et ψ sont des endomorphismes de E .
- Les applications ϕ et ψ sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Exercice 13 On considère l'application trace

$$\begin{aligned} \text{Tr} : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A = (a_{ij}) &\mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{aligned}$$

Déterminer les dimensions de $\text{Im } \text{Tr}$ et $\text{Ker } \text{Tr}$. Pour $n = 2$, donner une base de $\text{Ker } \text{Tr}$.

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On note H le sous-espace vectoriel de E donné par

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in E \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

On note $u = (1, 1, \dots, 1)$ et $D = \text{Vect}\{u\}$. On rappelle que $E = H \oplus D$.

- Soit $x \in E$. Donner la décomposition de x dans $H \oplus D$.
- Donner la projection p sur H parallèlement à D et la projection q sur D parallèlement à H .

Exercice 15 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \text{Id}$. On dit que f est une *homothétie*.