CC1 - Sujet A - Corrigé

March 17, 2023

Exercice 1

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle $\|.\|$, qui vérifie donc $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. On considère l'application

$$f : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto Tr(AB^2) \in \mathbb{R}$$

1. *Justifier qu'il existe $C > 0$ tel que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|Tr(M)| \leq C\|M\|$.*

   L'application $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est linéaire définie sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc c'est une application linéaire continue.
   La caractérisation de la continuité pour les applications linéaires nous donne donc bien $C > 0$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|Tr(M)| \leq C\|M\|$.

2. *Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.*

   On va utiliser la norme produit $\|(A, B)\|_1 = \|A\| + \|B\|$ sur l'espace produit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soient $X = (A, B), H = (H_1, H_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On calcule

$$\begin{aligned}
f(X + H) = f((A, B) + (H_1, H_2)) &= Tr((A + H_1)(B + H_2)^2) \\
&= Tr((A + H_1)(B^2 + BH_2 + H_2B + H_2^2)) \\
&= Tr(AB^2 + H_1B^2 + ABH_2 + H_1BH_2 \\
&+ AH_2B + H_1H_2B + AH_2^2 + H_1H_2^2) \\
&= \underbrace{Tr(AB^2)}_{f(A,B)} + \underbrace{Tr(H_1B^2 + ABH_2 + AH_2B)}_{\text{linéaire en } H} \\
&+ \underbrace{Tr(H_1BH_2 + H_1H_2B + AH_2^2 + H_1H_2^2)}_{:=R(H)}
\end{aligned}$$

   et on a alors, en utilisant la constante C obtenue en 1., et en remarquant que $\|H_1\| \leq \|H_1\| + \|H_2\| = \|H\|_1$,

$$\begin{aligned}
\frac{|R(H)|}{\|H\|_1} &\leq C\frac{\|H_1BH_2 + H_1H_2B + AH_2^2 + H_1H_2^2\|}{\|H\|_1} \\
&\leq C\frac{2\|H_1\|\|H_2\|\|B\| + \|A\|\|H_2\|^2 + \|H_1\|\|H_2\|^2}{\|H\|_1} \\
&\leq C\frac{2\|H\|_1^2\|B\| + \|A\|\|H\|_1^2 + \|H\|_1^3}{\|H\|_1} \\
&\leq C(\|A\| + 2\|B\| + \|H\|_1)\|H\|_1 \xrightarrow[H\to(0,0)]{} 0
\end{aligned}$$

   donc f est différentiable en (A, B),quel que soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a

$$Df(A, B) : H = (H_1, H_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto Tr(H_1B^2 + ABH_2 + AH_2B) \in \mathbb{R}$$

3. *On pose, pour $A_0, B_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned}
f_{B_0} &: A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto f(A, B_0) = Tr(AB_0^2) \in \mathbb{R} \\
g_{A_0} &: B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto f(A_0, B) = Tr(A_0B^2) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Montrer que f_{B_0} et g_{A_0} sont différentiables, et que $\forall (A_0, B_0), (H_1, H_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$Df(A_0, B_0)(H_1, H_2) = Df_{B_0}(A_0)(H_1) + Dg_{A_0}(B_0)(H_2)$$

Remarquons que $f_{B_0} = f \circ \Phi_{B_0}$ avec $\Phi_{B_0} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (M, B_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or $\Phi_{B_0} = (id_M, B_0)$ est différentiable, catr ses composantes le sont : la première est $id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, qui est linéaire continue, et la deuxième est constante. On a donc

$$D\Phi_{B_0}(M)(H_1) = (H_1, 0)$$

et donc, f_{B_0} est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a , pour tout $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $H_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} Df_{B_0}(A_0)(H_1) &= Df(\Phi_{B_0}(A_0)) \circ D\Phi_{B_0}(A_0)(H_1) \\ &= Df(A_0,B_0)(H_1, 0) \end{aligned}$$

On n'a pas besoin de calculer directement $Df_{B_0}(A)$, du coup, mais ce ne serait pas dur car f_{B_0} est linéaire continue, donc en fait quel que soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$Df_{B_0}(A)(H) = f_{B_0}(H) = Tr(HB_0^2).$$

On montre de même que, pour tout A_0, g_{A_0} est différentiable comme composée d'applications différentiables et

$$Dg_{A_0}(B_0)(H_2) = Df(A_0,B_0)(0, H_2)$$

On a donc, par linéarité de $Df(A_0, B_0)$,

$$\begin{aligned} Df(A_0, B_0)(H_1, H_2) &= Df(A_0, B_0)((H_1, 0) + (0, H_2)) \\ &= Df(A_0, B_0)(H_1, 0) + Df(A_0, B_0)(0, H_2) \\ &= Df_{B_0}(A_0)(H_1) + Dg_{A_0}(B_0)(H_2) \end{aligned}$$

Exercice 2

On considère l'application

$$F : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}, x + y^3 + y^2 + y, -x + y + 2z \right) \in \mathbb{R}^3$$

1. *Montrer que F réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^3$.*

   Remarquons que F est $\mathcal{C}^1$ car ses composantes sont soit des composées d'applications $\mathcal{C}^1$, soit des polynômes. Soit $u_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, on calcule

   $$Jac\ F(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 3y_0^2 + 2y_0 + 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   donc

   $$\det(Jac\ F(x_0, y_0, z_0)) = (e^{x_0} + e^{-x_0})(3y_0^2 + 2y_0 + 1)$$

   or, quel que soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $e^{x_0} + e^{-x_0} > 0$ et $3y_0^2 + 2y_0 + 1 > 0$ car le polynôme $P(y) = 3y^2 + 2y + 1$ n'a pas de racines réelles (son discriminant est -8). Donc, pour tout $u_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $\det(Jac\ F(u_0)) \neq 0$ et $DF(u_0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   D'après le théorème d'inversion locale, il existe donc un voisinage U_{u_0} de u_0 et un voisinage V_{u_0} de $F(u_0)$ tels que $F_{|U_{u_0}} : U_{u_0} \to V_{u_0}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

2. *Montrer que les fonctions*

$$\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{2} \in \mathbb{R}$$
$$\beta : t \in \mathbb{R} \mapsto t^3 + t^2 + t \in \mathbb{R}$$

sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$*. Déterminer leurs limites en* $\pm\infty$*.*

On a pour tout $t > 0$,

$$\alpha'(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0 \text{ et } \beta'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0$$

donc α et β sont strictement croissantes (et donc injectives).
De plus,

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = +\infty, \lim_{t\to-\infty} \alpha(t) = -\infty,$$
$$\lim_{t\to+\infty} \beta(t) = +\infty, \lim_{t\to-\infty} \beta(t) = -\infty,$$

(Du coup, puisque α et β sont continues, elles sont surjectives par le théorème des valeurs intermédiaires).

3. F *réalise-t-elle un* C^1*-difféomorphisme global* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *?*

On a déjà obtenu que $DF(u_0)$ est un isomorphisme linéaire, quel que soit $u_0 \in \mathbb{R}^3$.
D'après le théorème d'inversion globale, c'est donc un C^1-difféomorphisme global $\mathbb{R}^3 \to F(\mathbb{R}^3)$ ssi F est injective.
$\rightsquigarrow$ Mais ça ne nous suffit pas, on veut un C^1-difféomorphisme global $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donc il faut montrer que F est injective et $F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$, autrement dit que F est bijective $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.Alors on a

$$F(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{2} & = a \\ x + y^3 + y^2 + y & = b \\ -x + y + 2z & = c \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha(x) & = a \\ \beta(y) + x & = b \\ -x + y + 2z & = c \end{cases}$$

or, on a trouvé en 2. que $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = +\infty, \lim_{t\to-\infty} \alpha(t) = -\infty$, donc, comme α est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(x_0) = a$. De plus, puisque α est strictement croissante, elle est injective, donc x_0 est unique. Donc

$$F(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x & = x_0 \\ \beta(y) & = b - x_0 \\ y + 2z & = c + x_0 \end{cases}$$

D'après les mêmes arguments, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, donc il existe un unique $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\beta(y_0) = b - x_0$.
Donc

$$F(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x & = x_0 \\ y & = y_0 \\ 2z & = c + x_0 - y_0 \end{cases}$$

On a donc obtenu que tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$admet un unique antécédent $(x_0, y_0, \frac{1}{2}(c + x_0 - y_0)) \in \mathbb{R}^3$, donc c'est une bijection.
Par le théorème d'inversion globale, F est donc un C^1-difféomorphisme $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Exercice 3

On considère le système d'équations

$$(\star)\begin{cases} x^2+z^2 &= 1 \\ x^2+y^2 &= 4 \end{cases}$$

1. *Montrer qu'il existe un intervalle I contenant 0 et deux fonctions $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ strictement négatives telles que, pour tout $x \in I$, $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$ est solution de $(\star)$.*

   Notons
   $$f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x^2+z^2-1, x^2+y^2-4) \in \mathbb{R}^2$$
   Alors f est C^1, car ses composantes sont des polynômes, et
   $$(x,y,z) \text{ solution de } (\star) \iff f(x,y,z) = (0,0)$$
   On va chercher à appliquer le Théorème des Fonctions Implicites à f.
   $\rightsquigarrow$ On cherche des fonctions φ_1, φ_2 défiies au voisinage de 0: on va donc l'appliquer au voisinage d'un point du type $u_0 = (0, y_0, z_0)$. Or,
   $$f(0,y_0,z_0) = (0,0) \iff \begin{cases} z_0^2 &= 1 \\ y_0^2 &= 4 \end{cases} \iff \begin{cases} z_0 &= \pm 1 \\ y_0 &= \pm 2 \end{cases}$$
   $\rightsquigarrow$ On cherche de plus des fonctions négatives, donc on va choisir $u_0 = (0,-2,-1)$.
   On a déjà noté que f est C^1, et on a, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
   $$Jac\, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } Jac\, f(0,-2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$
   $\rightsquigarrow$ La sous-matrice des dérivées partielles par rapport à y et z est
   $$D_{(y,z)} f(0,-1,-2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$
   dont le déterminant est $-8 \neq 0$. Donc $D_{(y,z)} f(0,-2,-1)$ est inversible.
   On peut donc appliquer le TFI à f en $(0,-2,-1)$: il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage V de $(-2,-1)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction C^1 $\varphi : U \to V$ tels que
   $$\begin{matrix} (x,y,z) \in U \times V \\ \text{solution de } (\star) \end{matrix} \iff \begin{matrix} (x,y,z) \in U \times V \\ f(x,y,z) = (0,0) \end{matrix} \iff \begin{matrix} x \in U \\ (y,z) = \varphi(x) \end{matrix} \tag{1}$$
   Comme V est un voisinage de $(-2,-1)$,et φ est continue, on peut supposer, quitte à restreindre φ à l'ouvert $U^- = \varphi^{-1}(\ ]-\infty, 0[^2)$,que φ est à valeurs dans $]-\infty,0[$, et donc que φ_1, φ_2 sont strictement négatives. Puisque U^- est un ouvert qui contient 0, il existe $r > 0$ tel que l'intervalle $I =]-r, r[\subset U^-$, et si on note, pour tout $x \in I$,$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$,on a, pour tout $x \in I$,$(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$ solution de $(\star)$ avec $\varphi_1(x) < 0, \varphi_2(x) < 0$.

2. *Calculer, pour tout $x \in I, \varphi_1'(x)$ en fonction de x et $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2'(x)$ en fonction de x et $\varphi_2(x)$.*

   De plus, par le TFI, on a, pour tout $x \in I$,
   $$D\varphi(x) = -D_{(y,z)} f(x, \varphi(x))^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x))$$
   ce qui donne, en utilisant $Jac\, f(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$ et le lien dérivée-différentielle pour φ,
   $$\begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2\varphi_2(x) \\ 2\varphi_1(x) & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix} = \frac{-1}{4\varphi_1(x)\varphi_2(x)} \begin{pmatrix} 0 & -2\varphi_2(x) \\ -2\varphi_1(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\varphi_1(x)} \\ \frac{x}{\varphi_2(x)} \end{pmatrix}$$

3. *Donner la valeur de $\varphi_1(0)$ et de $\varphi_2(0)$.*

   On sait que $(0,-2,-1) \in U \times V$ et $f(0,-2,-1) = (0,0)$, donc par (1), $(-2,-1) = \varphi(0) = (\varphi_1(0), \varphi_2(0))$.