Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2020-2021
Compléments de calcul intégral et différentiel

Devoir maison :

Continuité et différentiabilité de l'inversion des applications linéaires

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues $E \to E$, muni de la norme d'applications linéaires :

$$\forall L \in \mathcal{L}(E),\ \|L\|_{\mathcal{L}} = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}.$$

On note $\mathcal{GL}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires inversibles. On va montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathcal{GL}(E) &\to \mathcal{GL}(E) \\ L &\mapsto L^{-1} \end{aligned}$$

est continue, puis qu'elle est différentiable sur $\mathcal{GL}(E)$.

1 - Continuité.

1. Soit $L_0 \in \mathcal{GL}(E), H \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|H\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}}$.
   Montrer que $\|L_0^{-1}H\|_{\mathcal{L}} < 1$.
2. Montrer que la série
   $$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1}$$
   converge normalement.
   Pourquoi peut-on en déduire qu'elle converge dans $(\mathcal{L}(E),\ \|.\|_{\mathcal{L}})$?
3. Montrer que $L_0 + H$ est inversible d'inverse $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1}$.
4. En déduire que $\mathcal{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.
5. Soit $L \in B(L_0, \frac{1}{2\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}})$. Exprimer $\|L^{-1} - L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}$ en fonction de $\|L - L_0\|_{\mathcal{L}}$.
   En déduire que $\mathcal{I}$ est continue en L_0.

2 - Différentiabilité.

On reprend les notations précédentes : $L_0 \in \mathcal{GL}(E), H \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|H\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}}$.

1. Montrer que
   $$\mathcal{I}(L_0 + H) = \mathcal{I}(L_0) - L_0^{-1}HL_0^{-1} + R(H) \text{ avec } \|R(H)\|_{\mathcal{L}} = \|H\|_{\mathcal{L}}^2 S(\|H\|_{\mathcal{L}}).$$
2. En déduire que $\mathcal{I}$ est différentiable en L_0.
3. Qu'est-ce-que ça donne pour $n = 1$?