TD4

Quelques exercices supplémentaires sur les martingales

Exercice 1

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoire i.i.d. telle que $\mathbb{P}(U_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(U_1 = -1) = 1 - p$ pour $p \in [0, 1]$. Soit $S = (S_n)_{n\geq 0}$ le processus défini par $S_0 = 1$ et

$$S_{n+1} = S_n \exp(\sigma U_{n+1}),\ n \geq 0.$$

On introduit la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \cdots, U_n)$, $n \geq 1$ et $\mathcal{F}_0$.

a. Montrer que le processus S est une $\mathcal{F}$-sous-martingale.
b. Montrer que pour tout fonction mesurable h et pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[h(S_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \varphi(S_n), \quad n \geq 0,$$

où φ est une fonction que l'on explicitera.
c. Pour quelle valeur de $a > 0$, le processus $\tilde{S} = (\tilde{S}_n)_{n\geq 0}$, $\tilde{S}_n = S_n/a$ est il une martingale ?

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\mathcal{F}$. Soient X une martingale, S et T deux $\mathcal{F}$ temps d'arrêt. On suppose que $S \leq T$ et T borné c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $T \leq k$.

a. Montrer que $X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]$. Ce résultat est connu sous le nom de théorème d'arrêt de Doob.
b. En déduire que $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.
c. Que devient ce résultat si X est une sous-martingale (sur-martingale) ?

Exercice 3

Deux joueurs s'affrontent dans une partie de pile ou face. La fortune initiale du joueur 1 est de a euros, celle du joueur 2 est de b euros. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. Chaque joueur perd ou gagne 1 euro à chaque tour du jeu en fonction du résultat.

a. Montrer que la richesse du joueur 1 au bout de n tours de jeu est donnée par

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} U_i.$$

où $(U_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 1\}$ vérifiant $\mathbb{P}(U_1 = 1) = \mathbb{P}(U_1 = -1) = 1/2$.

b. Montrer que $S = (S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à une filtration que l'on explicitera.

c. Montrer que le processus $(S_n^2 - n)_{n\geq 0}$ est également une $\mathcal{F}$-martingale.

d. Montrer que le temps auquel le jeu s'arrête est donné par

$$T = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0 \quad \text{ou } S_n = a+b\} = \inf\{n \geq 1 : S_n(a+b-S_n) = 0\}.$$

Est ce que T est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt ?

e. A l'aide de l'exercice 2, en déduire les deux relations

$$\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] = a \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[S_{n\wedge T}^2 - n\wedge T] = a^2.$$

f. Montrer que $0 \leq S_{n\wedge T} \leq a+b$.

g. A l'aide du théor'eme de convergence monotone et de la question précédente, montrer que l'on a

$$\mathbb{E}[T] \leq (a+b)^2 - a^2.$$

h. Déduire du résultat précédent et du théorème de convergence dominée les deux identités suivantes

$$\mathbb{E}[S_T] = a, \quad \mathbb{E}[S_T^2 - T] = a^2.$$

i. A l'aide du résultat précédent, conclure que

$$\mathbb{P}(S_T = a+b) = \frac{a}{a+b}, \quad \mathbb{P}(S_T = 0) = \frac{b}{a+b}, \quad \mathbb{E}[T] = ab.$$

Exercice 4

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Soit $H = (H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus $\mathcal{F}$-adapté.

a. Rappeler la définition de l'enveloppe de Snell U associé au processus H.

b. Montrer que si $H_t \in L^p(\mathbb{P})$ pour tout $t = 0, \cdots, T$ et pour un certain $p \geq 1$ alors $U_t \in L^p(\mathbb{P})$ pour tout $t = 0, \cdots, T$.

c. Soit $t \in \{0, \cdots, T\}$ fixé et $\nu_t = \inf\{s \geq t : U_s = H_s\}$. On rappelle que ν_t est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Montrer que le processus U arrêté en ν_t, noté U^{ν_t} est une $\mathcal{F}$-martingale.

d. En déduire que

$$U_t = \mathbb{E}[H_{\nu_t} | \mathcal{F}_t].$$