Chapitre 4:
Marchés financiers à temps discret.

Noufel Frikha

22 mars 2023

Plan du chapitre 4

Description du modèle probabiliste.

◦ On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Un scénario de marché sera noté $w \in \Omega$.

◦ $\mathbb{P}$ représente la probabilité rélle ou historique. Elle joue souvent un rôle mineur.

◦ Nous ferons dans ce chapitre les trois hypothèses suivantes :

- ◦ L'espace Ω est fini.
- ◦ Ω est muni de sa tribu grossière $\mathcal{P}(\Omega)$. C'est la tribu engendrée par tous les scénarios élémentaires $\{w\}$, $w \in \Omega$.
- ◦ $p_w = \mathbb{P}(\{w\}) > 0$ pour tout $w \in \Omega$, c'est-à-dire que la probabilité historique charge tous les scénarios. Il n'y a pas de scénarios inutiles dans Ω, l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dit non-redondant. $\sum_{w \in \Omega} p_w = 1$.

◦ Nous munissons l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ où la sous-tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information observable ou disponible à l'instant $t \in \{0, \cdots, T\}$. $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

◦ Le marché financier est constitué de $d+1$ actifs négociables S^0, S^1, $\cdots$, S^d et $T+1$ dates $\{0,\cdots,T\}$ et T périodes.

◦ Pour tout $t\in\{0,\cdots,T\}$, S_t^i désigne le prix (ou la valeur de cotation) de l'actif i à l'instant t. On suppose $S_t^i \geqslant 0$, $i\in\{0,\cdots,d\}$, $t\in\{0,\cdots,T\}$.

◦ Les prix des actifs à chaque instant t ne dépendent que de l'information disponible en t. Pour tout $t\in\{0,\cdots,T\}$, $(S_t^0,\cdots,S_t^d)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, ce qui revient à dire $\sigma(S_s^0,S_s^1,\cdots,S_s^d; 0\leqslant s\leqslant t)\subset\mathcal{F}_t$.

◦ Actif sans risque : S_t^0 sera le prix de l'actif sans risque (ou numéraire) à l'instant t, $S_0^0=1$ et $S_t^0>0$, pour tout $t\in\{1,\cdots,T\}$.

- S_t^0 représente la capitalisation à la date t d'une unité monétaire placée dans l'actif sans risque à la date 0.
- $r_t := \frac{S_t^0 - S_{t-1}^0}{S_{t-1}^0} = \frac{S_t^0}{S_{t-1}^0} - 1$ donc $r_t > -1$ et on a

$$S_t^0 = \prod_{s=1}^{t}(1+r_s).$$

◦ Actifs risqués : $S_t^1,\cdots,S_t^d$ seront les prix des actifs risqués à la date t.

◦ Pour récapituler les hypothèses, nous avons :

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ non-redondant
- $\mathcal{F}$ est une filtration avec $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$
- $(S_t^0, \cdots, S_t^d)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est un processus $\mathcal{F}$-adapté
- $S_0^0 = 1$ et pour tout $t \in \{1, \cdots, T\}$, $S_t^0 > 0$.

◦ La valeur actualisée d'un actif négociable est sa valeur exprimée en unités de numéraire :

$$\widetilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}, \quad \text{donc} \quad \widetilde{S}_t^0 = 1, \quad \forall t \in \{0, \cdots, T\}.$$

Cela consiste essentiellement à évaluer les prix des actifs, non plus en unités monétaires mais en unité numéraire. $\widetilde{S}_t^i$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Portefeuille ou stratégie

◦ Un agent ou investisseur sur le marché va constituer un portefeuille et va donc acheter ou vendre un certain montant d'actifs à chaque instant $t \in \{1, \cdots, T\}$.

◦ A la date $t-1$, au vu des informations disponibles à cet instant, i.e. $\mathcal{F}_{t-1}$, l'investisseur va décider d'une modification de la composition de son portefeuille *qui sera effective à l'instant* t. On note Φ_t^i la quantité d'actif i détenue en portefeuille à la date t ou plus précisément sur la période $]t-1, t]$.

◦ On note $\Phi = (\Phi_t^0, \cdots, \Phi_t^d)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ une stratégie de portefeuille. Le choix de Φ_t ne dépend que de l'information disponible à la date $t-1$ pour $t \geqslant 1$: Φ_t est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable. Le processus Φ est donc prévisible.

◦ Φ_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable. Par extension, nous dirons que Φ est prévisible si Φ_t est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable et Φ_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

$\circ$ $\Phi_t^i S_t^i$ est le montant investi dans l'actif $i = 0, \cdots, d$ à la date $t \in \{0, \cdots, T\}$. La valeur à la date t d'un tel portefeuille est

$$V_t^\Phi = \sum_{i=0}^{d} \Phi_t^i S_t^i = \Phi_t . S_t = \Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t^{1:d} . S_t^{1:d} .$$

où $\Phi_t^{1:d} = (\Phi_t^1, \cdots, \Phi_t^d)$, $S_t^{1:d} = (S_t^1, \cdots, S_t^d)$. Alors, $V_0^\Phi = x = \Phi_0 . S_0$.

$\circ$ Valeur actualisée d'un portefeuille à la date $t \in \{0, \cdots, T\}$:

$$\widetilde{V}_t^\Phi = \frac{V_t^\Phi}{S_t^0} = \Phi_t^0 + \Phi_t^{1:d} . \widetilde{S}_t^{1:d} = \Phi_t . \widetilde{S}_t, \quad \widetilde{S}_t = (1, \widetilde{S}_t^{1:d})$$

Portefeuille/stratégie autofinançant

○ Il s'agit de construire date après date un portefeuille se finançant lui même : la liquidation du portefeuille de la date précédente permet exactement de construire celui de la date suivante.

○ La valeur du portefeuille juste après les cotations de l'instant $t-1$ est donnée par

$$\Phi_{t-1}.S_{t-1} = \sum_{i=0}^{d} \Phi^i_{t-1} S^i_{t-1}$$

○ La valeur du portefeuille après le redéploiement décidé par l'investisseur au vu des cotations de $t-1$ et juste avant celui de la date t est donné par :

$$\Phi_t.S_{t-1} = \sum_{i=0}^{d} \Phi^i_t S^i_{t-1}$$

○ La conservation de valeur du portefeuille implique la condition d'autofinancement :

$$\boxed{\Phi_{t-1}.S_{t-1} = \Phi_t.S_{t-1}}$$

Definition (Portefeuille autofinançant)

Un portefeuille $(\Phi_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ $\mathcal{F}$-prévisible est autofinançant ou autofinancé si pour tout $t \in \{1, \cdots, T\}$,

$$\Phi_{t-1}.S_{t-1} = \Phi_t.S_{t-1} \iff \Delta\Phi_t.S_{t-1} = 0 \iff \Delta\Phi_t.\widetilde{S}_{t-1} = 0$$

Alors pour tout $t \in \{1, \cdots, T\}$

$$\Delta V_t^\Phi = V_t^\Phi - V_{t-1}^\Phi = \Phi_t.S_t - \Phi_{t-1}.S_{t-1} = \Phi_t.S_t - \Phi_t.S_{t-1} = \Phi_t.\Delta S_t$$

et donc

$$V_t^\Phi = V_0^\Phi + V_t^\Phi - V_0^\Phi = V_0^\Phi + \sum_{s=1}^{t} \Delta V_s = V_0^\Phi + \sum_{s=1}^{t} \Phi_s.\Delta S_s.$$

La notion d'autofinancement se traduit par le fait que la variation de valeur du portefeuille entre $t-1$ et t ne provient que de la variation des cours entre ces mêmes instants.

◦ La valeur d'un portefeuille auto-financé est donc à chaque instant la somme de l'investissement initial $x = \Phi_0.S_0$ et des gains algébriques réalisés au gré des cotations.
◦ On peut également montrer que la valeur du portefeuille peut être construite à partir de sa valeur initiale x et $(\Phi_t^{1:d})_{1\leqslant t\leqslant T}$. En effet, on a $\Phi_0^0 = x - \Phi_0^{1:d}.S_0^{1:d}$ puis par auto-financement $\Phi_1^0 - \Phi_0^0 = -\Phi_1^{1:d}.\widetilde{S}_0^{1:d} + \Phi_0^{1:d}.\widetilde{S}_0^{1:d}$ ce qui donne $\Phi_1^0 = x - \Phi_1^{1:d}.S_0^{1:d}$. De même, on peut montrer

$$\Phi_t^0 = x - \Phi_1^{1:d}.S_0^{1:d} - \sum_{s=2}^{t} \Delta\Phi_s^{1:d}.\widetilde{S}_{s-1}^{1:d}, \quad t \in \{2, \cdots, T\}.$$

Autrement dit, $(\Phi_t^0)_{0\leqslant t\leqslant T}$ est entièrement déterminé par x et $(\Phi_t^{1:d})_{0\leqslant t\leqslant T}$.
◦ Aussi, on a

$$\Delta\widetilde{V}_t^{\Phi} = \widetilde{V}_t^{\Phi} - \widetilde{V}_{t-1}^{\Phi} = \Phi_t.\widetilde{S}_t - \Phi_{t-1}.\widetilde{S}_{t-1} = \Phi_t^{1:d}.\widetilde{S}_t - \Phi_t^{1:d}.\widetilde{S}_{t-1} = \Phi_t^{1:d}.\Delta\widetilde{S}_t^{1:d}$$

et donc $\widetilde{V}_t^{\Phi} = x + \sum_{s=1}^{t} \Phi_s^{1:d}.\Delta\widetilde{S}_s^{1:d} = x + \sum_{s=1}^{t} \Phi_s.\Delta\widetilde{S}_s$ ce qui donne $V_t^{\Phi} = S_t^0(x + \sum_{s=1}^{t} \Phi_s^{1:d}.\Delta\widetilde{S}_s^{1:d})$. Φ^0 n'intervient pas pour déterminer V_t^{Φ}, $t \in \{1, \cdots, T\}$.
◦ Une stratégie de portefeuille autofinancé est la donnée de $(x, (\Phi_t^{1:d})_{1\leqslant t\leqslant T})$ ou de $(\Phi_t^0, \Phi_t^{1:d})_{1\leqslant t\leqslant T}$.

◦ Un actif optionnel ou produit dérivé est un contrat basé sur un actif sous-jacent négociable, i.e. s'échangeant sur un marché négociable.
◦ Un actif européen sera assimilé à une variable aléatoire H ne dépendant que de la valeur d'un ou plusieurs sous-jacent à la date T.
◦ Exemples :

1. Call $H^i = (S^i_T - K)_+$, Put : $H^i = (K - S^i_T)_+$
2. Bull Call Spread : achat d'un Call avec petit strike K_1 et vente d'un autre Call avec un grand strike K_2.
   $H^i = (S^i_T - K_1)_+ - (S^i_T - K_2)_+$.
3. Achat d'un Put et d'un Call de mêmes dates et mêmes prix d'exercices K. $H^i = (K - S^i_T)_+ + (S^i_T - K)_+$.

◦ Un actif américain : La date d'exercice içi n'est pas forcément T mais tout temps honnête antérieur à T. Acheter un contrat/option américain relatif à un processus $\mathcal{F}$-adapté H assure à son détenteur le droit de recevoir une et une seule fois à une date éventuellement aléatoire mais honnête τ de son choix le payoff H_τ. Honnête signifie que si on suit la règle d'arrêt τ alors $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$.

Plan du chapitre 4

Definition

Un portefeuille auto-financé de caractéristiques $(x, \Phi^{1:d})$ est une stratégie d'arbitrage si :

1. l'investissement initial est nul, $x = 0$.
2. l'investissement en actifs risqués $\Phi = \Phi^{1:d}$ vérifie :

$$V_T^{0,\Phi} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad V_T^{0,\Phi} \neq 0$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbb{P}(V_T^{0,\Phi} \geqslant 0) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(V_T^{0,\Phi} > 0) > 0.$$

Une stratégie d'arbitrage est donc une stratégie auto-financée dans laquelle l'investissement initial est nul, le risque inexistant puisqu'aucune perte n'est possible en T mais qui génère en des profits pour au moins un scénario $w \in \Omega$.

Definition

Le marché financier est viable si pour toute stratégie Φ admissible (auto-financée), on a

$$V_T^{0,\Phi} \geqslant 0 \Rightarrow V_T^{0,\Phi} = 0 \quad (\Omega \quad \text{est fini})$$

ce qui est équivalent à

$$\widetilde{V}_T^{0,\Phi} \geqslant 0 \Rightarrow \widetilde{V}_T^{0,\Phi} = 0$$

c'est-à-dire s'il n'y a pas de stratégie d'arbitrage sur ce marché.

Caractérisation probabiliste de la viabilité

Theorem

Le marché financier non redondant est viable si et seulement si il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ vérifiant :

1. *Pour tout $w \in \Omega$, $\mathbb{P}^*(w) > 0$, i.e. $\mathbb{P}^*$ est non-redondant*
2. *Le processus de prix $(\widetilde{S}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$-martingale.*

Une telle probabilité (si elle existe) est appelée probabilité risque-neutre.

Avant de démontrer ce théorème, on donne quelques résultats auxiliaires.

Lemma

Pour toute probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, pour tout portefeuille (x, Φ) auto-financé, le processus $(\widetilde{V}_t^{x,\Phi})_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale.

Démonstration.

Il suffit de remarquer que $\widetilde{V}_t^{x,\Phi} = x + (\Phi : \widetilde{S})_t$ avec $(\widetilde{S})_{0 \leqslant t \leqslant T}$ $(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$-martingale donc $\widetilde{V}$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$-martingale. □

Lemma

Soit $(X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}$-adapté avec $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. Si pour tout Φ $\mathcal{F}$-prévisible, borné par 1 et nul en $t = 0$ on a

$$\mathbb{E}[(\Phi : X)_T] = 0$$

alors $(X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale.

Preuve du lemme.

On traite le cas $d = 1$. Le cas multi-dimensionnel se traite composante par composante. Soit $t \in \{1, \cdots, T\}$ et $A \in \mathcal{F}_{t-1}$, on pose :

$$\Phi_t = \mathbf{1}_A, \quad \Phi_s = 0, \quad \text{si } s \neq t$$

alors $(\Phi : X)_T = \mathbf{1}_A \Delta X_t$ et donc $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \Delta X_t] = 0$ pour tout $A \in \mathcal{F}_t$.
D'après la caractérisation de l'espérance conditionnelle, on en déduit

$$\mathbb{E}[\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0.$$

Ce résultat étant valable pour tout $t \in \{1, \cdots, T\}$, on conclut que X est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale. $\square$

Preuve du théorème.

On démontre $\Leftarrow$. Soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité risque-neutre équivalente à $\mathbb{P}$ et soit un portefeuille auto-financé de caractéristiques $(0, \Phi)$ avec Φ admissible. Comme $\widetilde{S}$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ martingale, il en est de même pour $\widetilde{V}^{0,\Phi}$ donc $\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[\widetilde{V}_T^{0,\Phi}] = \widetilde{V}_0^{0,\Phi} = 0$ donc si $\widetilde{V}_T^{0,\Phi} \geqslant 0$ alors $\widetilde{V}_T^{0,\Phi} = 0$, $\mathbb{P}^*$-p.s. ce qui donne $\widetilde{V}_T^{0,\Phi} = 0$ $\mathbb{P}$-p.s. car $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$. Donc, il n'y a pas de stratégies d'arbitrage.

Démontrons maintenant $\Rightarrow$. L'espace
$\mathcal{A} := \{X : \Omega \to \mathbb{R}$, variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable$\}$ est un espace vectoriel de dimension $|\Omega|$. On munit cet espace du produit scalaire $X.Y = \mathbb{E}[XY]$.
L'espace

$$\Gamma = \left\{\widetilde{V}_T^{0,\Phi} \text{ avec } \Phi \quad \mathcal{F}\text{-prévisible}\right\} = \left\{\sum_{t=1}^{T} \Phi_t.\Delta\widetilde{S}_t,\ (\Phi_t)_{0\leqslant t\leqslant T} \quad \text{prévisible} \right\}.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$. L'espace

$$\Pi = \{X \in \mathcal{A} : X \geqslant 0 \text{ et } \quad \mathbb{E}[X] = 1\} \subset \mathcal{A}$$

est un compact (fermé et borné) convexe. $\square$

Fin de la démonstration.

Maintenant, l'AOA implique $\Gamma \cap \Pi = \varnothing$. D'après le théorème de séparation, il existe $X^* \in \mathcal{A}$ et un réel $\alpha > 0$ tels que $X.X^* \geqslant \alpha$ pour tout $X \in \Pi$ et $X.X^* = 0$ pour tout $X \in \Gamma$. Soit $X = \frac{\mathbf{1}_{w_0}}{\mathbb{P}(w_0)}$ alors $X \in \Pi$ et donc $(X.X^*) \times \mathbb{P}(w_0) = X^*(w_0) \geqslant \alpha\mathbb{P}(w_0) > 0$ pour tout $w_0 \in \Omega$. Donc, la mesure

$$\mathbb{P}^* = \frac{X^*}{\mathbb{E}[X^*]}\mathbb{P}$$

est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$. Aussi, pour tout $X \in \Gamma$, $X.X^* = 0$ donne $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XX^*] = 0$ ce qui est équivalent à $\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[X] = 0$. Donc pour tout Φ $\mathcal{F}$-prévisible, bornée par 1 on a $\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[\widetilde{V}_T^{0,T}] = 0$. D'après le lemme, on a donc $\widetilde{S}$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$-martingale. $\square$

Pour la preuve, on a utilisé le théorème de séparation suivant :

Theorem

Soit $(E, <.,.>)$ *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel euclidien (de dimension finie) et* $\Pi \subset E$ *un ensemble convexe, fermé, non vide et compact. Soit* Γ *un* $\mathbb{R}$ *sous espace vectoriel de* E *tel que* $\Pi \cap \Gamma = \varnothing$ *alors il existe* x^* *tel que* $< x, x^* >= 0$ *pour tout* $x \in \Gamma$ *et un réel* $\alpha > 0$ *tel que pour tout* $x \in \Pi$, $< x, x^* > \geqslant \alpha$.

Plan du chapitre 4

○ Problème de la réplication : Dans la perspective du vendeur, il cherche le montant minimum qu'il doit réclamer à l'acheteur pour pouvoir à l'échéance faire face au paiement de H en gérant "au plus juste" c'est-à-dire en utilisant un portefeuille auto-financé (x, Φ) tel que $V_T^{x,\Phi} = H$.

Definition

Un actif dérivé européen H est réplicable s'il existe un portefeuille auto-financé de caractéristiques (x, Φ) tel que : $V_T^{x,\Phi} = H$. La stratégie auto-financée (x, Φ) est appelée stratégie de réplication.

Lemma

Supposons le marché viable. Si H est réplicable et s'il existe $x, x' \in \mathbb{R}$ et Φ, Φ' $\mathcal{F}$-prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tels que $H = V_T^{x,\Phi} = V_T^{x',\Phi'}$ alors pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$, $V_t^{x,\Phi} = V_t^{x',\Phi'}$.

◦ Interprétation : Toutes les stratégies de réplication de H ont même valeur à chaque instant il n'y a pas unicité de la stratégie de réplication mais de sa valeur. Cette valeur commune est appelée la valeur théorique (ou prix théorique) de H à la date t : c'est la somme qui détenue en t permet d'initier une stratégie de réplication et donc de produire H exactement en T.

Preuve du lemme.

Fixons $\mathbb{P}^*$ probabilité risque-neutre et (x, Φ), (x', Φ') tels que $H = V_T^{x,\Phi} = V_T^{x',\Phi'}$ alors $\widetilde{V}^{x,\Phi}$ et $\widetilde{V}^{x',\Phi'}$ sont des $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$-martingales. Ainsi, pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$

$$\widetilde{V}_t^{x,\Phi} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[\widetilde{V}_T^{x,\Phi}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[\widetilde{H}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[\widetilde{V}_T^{x',\Phi'}|\mathcal{F}_t] = \widetilde{V}_t^{x',\Phi'}$$

et donc $V_t^{x,\Phi} = V_t^{x',\Phi'}$. En particulier, $x = x'$. □

Theorem

Dans un marché viable pour tout actif contingent réplicable et pour toute probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$ et toute stratégie auto-financée de caractéristiques (x,Φ) répliquant H, on a

$$\forall t \in \{0,\cdots,T\}, \quad V_t^{x,\Phi} = S_t^0 \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[\frac{H}{S_T^0}|\mathcal{F}_t\right].$$

En particulier, on a

$$x = \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[\frac{H}{S_T^0}\right].$$

∘ Remarque : Le prix théorique de l'option ne dépend pas de la probabilité risque-neutre choisie. Pour $\mathbb{P}^*$ et $\mathbb{Q}^*$ risque-neutre, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[\frac{H}{S_T^0}|\mathcal{F}_t\right] = \widetilde{V}_t^{x,\Phi} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}*}\left[\frac{H}{S_T^0}|\mathcal{F}_t\right]$$

Démonstration.

Soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité risque-neutre et (x, Φ) une stratégie répliquant H. $\widetilde{S}$ est donc une $\mathbb{P}^*$-martingale, donc $(\widetilde{V}_t^{x,\Phi})_{0\leqslant t\leqslant T}$ aussi. Parant de $\widetilde{V}_T^{x,\Phi} = H/S_T^0$, en prenant l'espérance conditionnelle, on obtient :

$$V_t^{x,\Phi} = S_t^0 \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[\frac{H}{S_T^0}|\mathcal{F}_t\right]$$

□

Definition (Marché financier complet)

Un marché financier est complet si tout actif contingent européen H est réplicable.

Dans un marché financier non-redondant, l'ensemble des probabilités risque-neutre est défini par :

$$\mathcal{P} = \left\{\mathbb{Q} : \mathbb{Q}(\{w\}) > 0, \; \forall w \in \Omega, \; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Delta\widetilde{S}_t|\mathcal{F}_{t-1}] = 0, \; 1 \leqslant t \leqslant T\right\}.$$

Le théorème suivant permet de caractériser en terme probabilistes les marchés completes et montre que $\mathcal{P}$ est réduit à un singleton.

Theorem

Un marché financier viable est complet si et seulement si il existe une unique probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$, c'est-à-dire $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}^*\}$.

En utilisant ce théorème, on peut alors déterminer le prix de H :

$$\forall t \in \{0, \cdots, T\}, \quad V_t^{x,\Phi} = S_t^0 \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[\frac{H}{S_T^0} | \mathcal{F}_t\right].$$

Démonstration.

$\Rightarrow$ Le marché étant viable l'ensemble $\mathcal{P}$ des probabilités risque-neutre est non-vide. Soit $\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2 \in \mathcal{P}$, Soit $A \in \mathcal{F}_T$. L'actif contingent européen $S_T^0 \mathbf{1}_A$ est réplicable. Donc il existe (x, Φ) tel que $V_T^{x,\Phi} = S_T^0 \mathbf{1}_A$ et donc

$$\mathbb{P}^1(A) = \mathbb{P}^2(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^1}[\widetilde{V}_T^{x,\Phi}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^2}[\widetilde{V}_T^{x,\Phi}] = x.$$

car $\widetilde{V}$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^i)$-martingale pour $i = 1, 2$. Donc, $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^2$. □

$\Leftarrow$ On procède par contraposition. On suppose que le marché viable n'est pas complet. On va montrer l'existence de deux probabilités risque neutre. On sait qu'il existe au moins une probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$. On pose $E = \{X : \Omega \to \mathbb{R},\ v.a.\ \mathcal{F}_T\text{-mesurable}\}$. On munit E du produit scalaire $X.Y = \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[XY]$. Soit $\mathcal{A}$ le s.e.v. défini par

$$\mathcal{A} = \left\{\widetilde{V}_T^{x,\Phi}\ :\ x \in \mathbb{R},\ \Phi\ \mathcal{F}\text{-prévisible}\right\} = \left\{x + \sum_{t=1}^{T} \Phi_t.\Delta\widetilde{S}_t\ :\ x \in \mathbb{R},\ \Phi\ \mathcal{F}\text{-prévisible}\right\}.$$

Le marché n'étant pas complet, il existe H non-identiquement nul tel que $H/S_T^0 \notin \mathcal{A}$. On considère la projection orthogonale sur $\mathcal{A}$:

$$Y = \frac{H}{S_T^0} - Proj_{\mathcal{A}}^{orth}\left(\frac{H}{S_T^0}\right).$$

On a $Y \neq 0$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[XY] = 0$ pour tout $X \in \mathcal{A}$. La variable aléatoire $1 = \widetilde{V}_T^{1,0} \in \mathcal{A}$ donc $\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[\widetilde{V}_T^{1,0} Y] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[Y] = 0$ $\square$

Démonstration.

On pose

$$\mathbb{P}^{**} = \left(1 + \frac{Y}{2|Y|_\infty}\right)\mathbb{P}^*, \quad |Y|_\infty = \sup_{w\in\Omega}|Y(w)| > 0.$$

donc $\mathbb{P}^{**}(w) = (1 + \frac{Y(w)}{2|Y|_\infty})\mathbb{P}^*(w) \geqslant (1 - \frac{|Y(w)|}{2|Y|_\infty})\mathbb{P}^*(w) \geqslant \mathbb{P}^*(w)/2$. Donc $\mathbb{P}^{**} \sim \mathbb{P}^*$. Maintenant, soit Φ un processus prévisible $\mathcal{F}$-prévisible, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, borné par 1, nul en 0. $\widetilde{S}$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale et $(\Phi : \widetilde{S})_T = \widetilde{V}_T^{0,\Phi} \in \mathcal{A}$ donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{**}}[(\Phi : \widetilde{S})_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[(\Phi : \widetilde{S})_T] + \frac{1}{2|Y|_\infty}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[Y\widetilde{V}_T^{0,\Phi}] = 0.$$

Donc d'après le lemme, $\widetilde{S}$ est une $\mathbb{P}^{**}$- martingale donc $\mathbb{P}^{**}$ et $\mathbb{P}^*$ sont deux probabilités risque-neutre. $\square$

Relation de parité Call-Put :

○ Notons C_t et P_t la valeur théorique à l'instant t d'un Call et d'un Put européen de maturité T et de prix d'exercice K. On sait d'après les résultats précédents que $\widetilde{C}_t$ et $\widetilde{P}_t$ sont deux $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$-martingales avec

$$C_t = S_t^0 \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[\frac{(S_T - K)_+}{S_T^0} | \mathcal{F}_t\right], \quad P_t = S_t^0 \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[\frac{(K - S_T)_+}{S_T^0} | \mathcal{F}_t\right].$$

Remarquons que l'on a

$$(S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K \Rightarrow \frac{(S_T - K)_+}{S_T^0} - \frac{(K - S_T)_+}{S_T^0} = \widetilde{S}_T - \frac{K}{S_T^0}$$

et $(\widetilde{S}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$-martingale donc

$$\boxed{C_t - P_t = S_t^0 \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[\frac{(S_T - K)}{S_T^0} | \mathcal{F}_t\right] = S_t - K\frac{S_t^0}{S_T^0}}$$

Algorithme d'évaluation d'options européennes dans le cas d'une marché Markovien

On suppose que le marché financier est complet et constitué d'un seul actif risqué et d'un actif sans risque. On fait les deux hypothèses suivantes :

1. L'actif risqué est une $(\mathbb{P}^*, \mathcal{F})$-chaîne de Markov de transition $(P_t)_{t\in\{0,\cdots,T\}}$ c'est-à-dire pour tout $t \in \{0, \cdots, T-1\}$

$$\mathbb{P}^*(S_{t+1} = y|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}^*(S_{t+1} = y|S_t) = P_t(S_t, y)$$

   avec $(x, y) \mapsto P_t(x, y)$ est le noyau de transition.

2. L'actif sans risque S^0 est donné par

$$S_t^0 = \prod_{i=0}^{t-1}(1 + \rho_{i+1}(S_i))$$

   où $(\rho_t)_{1\leqslant t\leqslant T}$ est une suite de fonctions à valeurs dans $]-1, +\infty[$. On a donc que S^0 est supposé prévisible.

Theorem

Soit $(v_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ la suite de fonction de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par la récurrence descendante :

$$\begin{aligned} v_T(x) &= k(x),\; x\in E \\ v_t(x) &= \frac{1}{1+\rho_{t+1}(x)}\sum_{y\in E} P_t(x,y)v_{t+1}(y), \quad x\in E, 0\leqslant t\leqslant T-1 \end{aligned}$$

Alors, pour tout $t\in\{0,\cdots,T\}$, le prix à l'instant t de l'option européenne de payoff $k(S_T)$ et maturité T vérifie

$$p_t = v_t(S_t) = S_t^0\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[\frac{1}{S_T^0}k(S_T)|\mathcal{F}_t\right].$$

On cherche à évaluer l'actif européen de payoff $H = k(S_T)$. On sait que pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$

$$\begin{aligned} p_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[\prod_{i=0}^{T-1}\frac{1}{(1+\rho_{i+1}(S_i)}k(S_T)|\mathcal{F}_t\Big]\prod_{i=0}^{t-1}(1+\rho_{i+1}(S_i)) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[\prod_{i=t}^{T-1}\frac{1}{(1+\rho_{i+1}(S_i)}k(S_T)|\mathcal{F}_t\Big]. \end{aligned}$$

On considère le processus V défini par $V_0 = v_0(S_0)$ et

$$V_t = v_t(S_t)\prod_{i=0}^{t-1}\frac{1}{(1+\rho_{i+1}(S_i))}, \quad 1 \leqslant t \leqslant T.$$

Montrons que V est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$-martingale. Tout d'abord, on remarque V est $\mathcal{F}$-adapté.

Ensuite, $\prod_{i=0}^{t-1} \frac{1}{(1+\rho_{i+1}(S_i))}$ est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[V_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] &= \prod_{i=0}^{t-2} \frac{1}{(1+\rho_{i+1}(S_i))} \frac{1}{1+\rho_t(S_{t-1})} \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[v_t(S_t)|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
&= \prod_{i=0}^{t-2} \frac{1}{(1+\rho_{i+1}(S_i))} \frac{1}{1+\rho_t(S_{t-1})} \sum_{y\in E} v_t(y) P_t(S_{t-1}, y) \\
&= \prod_{i=0}^{t-2} \frac{1}{(1+\rho_{i+1}(S_i))} v_{t-1}(S_{t-1}) \\
&= V_{t-1}.
\end{aligned}$$

Donc V est une martingale. Et on a donc $\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[V_T|\mathcal{F}_t\right] = V_t$ ce qui donne

$$\mathbb{E}\left[k(S_T)\prod_{i=0}^{T-1} \frac{1}{(1+\rho_{i+1}(S_i))}|\mathcal{F}_t\right] = v_t(S_t)\prod_{i=0}^{t-1} \frac{1}{1+\rho_{i+1}(S_i)} = \frac{v_t(S_t)}{S_t^0}.$$

L'espace des scénarios est défini par $\Omega = \prod_{t=1}^{t} \{b_t, h_t\}$. T périodes et $T+1$ dates, $t = 0, \cdots, T$. Les réels b_t et h_t vérifient pour tout $t \in \{1, \cdots, T\}$, $-1 < b_t < h_t$. On rappelle que $\mathbb{P}$ est définie sur la tribu grossière $\mathcal{P}(\Omega)$ et est supposée non-redondante, $\mathbb{P}(\{w\}) > 0$ pour tout $w \in \Omega$. Le modèle est constitué de deux actifs $(d = 1)$, l'actif sans risque dont le processus S^0 est donné par

$$\forall t \in \{0, \cdots, T\}, \quad S_0^0 = 1 \quad S_t^0 = \prod_{s=1}^{t}(1 + r_s)$$

où $(r_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ *est une suite déterministe* à valeurs dans $]-1, \infty[$.
Le second est l'actif risqué et son processus de prix S est donnée par $S_0 = s_0$ et

$$S_{t+1} = S_t(1 + U_{t+1}), \quad 0 \leqslant t \leqslant T - 1$$

où la variable aléatoire U_t désigne l'application t-ème coordonnée

$$U_t : \Omega = \prod_{s=1}^{T} \{b_s, h_s\} \to \{b_t, h_t\}$$

et $U_t(w) = w_t$ avec $w = (w_s)_{1 \leqslant s \leqslant T}$.

Nous posons $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ avec $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_t = \sigma(U_1, \cdots, U_t)$, $1 \leqslant t \leqslant T$. On a aussi $\sigma(U_1, \cdots, U_T) = \mathcal{P}(\Omega)$.Toute l'information est bien révélée en T. D'autre part, le processus de prix S est clairement $\mathcal{F}$-adapté puisque $S_t = s_0 \prod_{s=1}^{t}(1 + U_s)$ ainsi $\sigma(S_1, \cdots, S_t) \subset \mathcal{F}_t$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$. Aussi,

$$U_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

donc $U_1, \cdots, U_t$ est $\sigma(S_1, \cdots, S_t)$-mesurables et on a $\mathcal{F}_t = \sigma(U_1, \cdots, U_t) = \sigma(S_1, \cdots, S_t)$.

Theorem

Sous l'hypothèse $-1 < b_t < h_t$, $1 \leqslant t \leqslant T$, le marché est viable si et seulement si $b_t < r_t < h_t$ pour tout $1 \leqslant t \leqslant T$. Le marché est alors complet $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}^*\}$.
Sous l'unique probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$, les rendements $(U_t)_{1 \leqslant t \leqslant T}$ sont des variables aléatoires indépendantes de lois

$$\mathbb{P}^*(U_t = h_t) = \pi_t \quad \mathbb{P}^*(U_t = b_t) = 1 - \pi_t, \quad \pi_t = \frac{r_t - b_t}{h_t - b_t} \in (0,1), \quad 1 \leqslant t \leqslant T$$

Démonstration.

On suppose le marché viable. Soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité risque neutre, donc telle que $\widetilde{S}$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$-martingale. Alors

$$\widetilde{S}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[\widetilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \widetilde{S}_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[\frac{1+U_{t+1}}{1+r_{t+1}}|\mathcal{F}_t\right]$$

donc $\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t] = r_{t+1}$ ce qui donne $\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[U_{t+1}] = r_{t+1}$. Or

$$r_{t+1} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[U_{t+1}] = \mathbb{P}^*(U_{t+1} = h_{t+1})h_{t+1} + (1 - \mathbb{P}^*(U_{t+1} = h_{t+1}))b_{t+1}$$

donc $\mathbb{P}^*(U_{t+1} = h_{t+1}) = \frac{r_{t+1}-b_{t+1}}{h_{t+1}-b_{t+1}}$. Comme $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$, $\mathbb{P}^*(U_{t+1} = h_{t+1}) \in (0,1)$ ce qui donne

$$r_t \in (b_t, h_t), \quad 1 \leqslant t \leqslant T.$$

□

Démonstration.

Réciproquement, supposons maintenant que $r_t \in (b_t, h_t)$, $1 \leqslant t \leqslant T$. Alors on définit sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

$$\mathbb{P}^* = p_1^* \otimes \cdots \otimes p_T^*$$

avec $p_t^*(\{h_t\}) = \pi_t$ et $p_t^*(\{b_t\}) = 1 - \pi_t$, c'est-à-dire pour tout $w \in \Omega = \prod_{t=1}^T \{h_t, b_t\}$

$$\mathbb{P}^*(w) = \prod_{t=1}^T p_t^*(w_t) > 0.$$

Remarquons que pour $w_t \in \{h_t, b_t\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*_{U_t}(w_t) = \mathbb{P}^*(U_t = w_t) &= \mathbb{P}^*\left(\prod_{s=1}^{t-1}\{h_s, b_s\} \times \{w_t\} \times \prod_{s=t+1}^{T}\{h_s, b_s\}\right)\\ &= p^*(w_t)\prod_{s\neq t} p_s^*(\{h_s, b_s\}) = p_t^*(w_t).\end{aligned}$$

Démonstration.

Sous $\mathbb{P}^*$, les variables $(U_1, \cdots, U_T)$ sont indépendantes. En effet, par définition

$$\mathbb{P}^*((U_1, \cdots, U_T) = (w_1, \cdots, w_T)) = \prod_{t=1}^{T} p_t^*(w_t) = \prod_{t=1}^{T} \mathbb{P}^*(U_t = w_t)$$

De plus, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[U_t] = h_t\pi_t + b_t(1-\pi_t) = r_t$ donc (à faire en exercice) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[\widetilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \widetilde{S}_t$. Le marché est donc viable.
Il reste à montrer qu'il n'existe pas d'autre probabilité risque-neutre.
Soit $\mathbb{Q}$ une autre probabilité risque neutre. $\widetilde{S}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t] = r_{t+1} \Rightarrow \mathbb{Q}(U_{t+1} = h_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \pi_{t+1},\ \mathbb{Q}(U_{t+1} = b_{t+1}|\mathcal{F}_t) = 1-\pi_{t+1}.$$

donc $\mathbb{Q}_{U_{t+1}} = p^*_{t+1}$. $\square$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{(U_1,\cdots,U_T)}(x_1,\cdots,x_T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{U_1=x_1}\cdots\mathbf{1}_{U_T=x_T}\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{U_1=x_1}\cdots\mathbf{1}_{U_{T-1}=x_{T-1}}\mathbb{Q}(U_T = x_T|\mathcal{F}_{T-1})\right] \\
&= p^*(x_T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{U_1=x_1}\cdots\mathbf{1}_{U_{T-1}=x_{T-1}}\right] \\
&= \prod_{t=1}^{T} p^*(x_t) \\
&= \prod_{t=1}^{T} \mathbb{Q}_{U_t}(x_t).
\end{aligned}$$

Donc sous $\mathbb{Q}$, $(U_1,\cdots,U_T)$ sont indépendants et

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{(U_1,\cdots,U_T)} = \otimes_{t=1}^{T}\mathbb{Q}_{U_t} = \otimes_{t=1}^{T}\mathbb{P}^*_{U_t} = \mathbb{P}^*.$$

$\square$

Theorem

La suite $S = (S_t)_{1\leqslant t\leqslant T}$ est une $\mathbb{P}^*$-chaîne de Markov et sa matrice de transition P est donnée par

$$P_t(x,y) = \mathbb{P}^*(S_{t+1} = y | S_t = x) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin \{x(1+h_{t+1}), x(1+b_{t+1})\}, \\ \pi_{t+1} & \text{si } y = x(1+h_{t+1}), \\ 1-\pi_{t+1} & \text{si } y = x(1+b_{t+1}). \end{cases}$$

Démonstration.

S_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. U_{t+1} est indépendante de $\mathcal{F}_t$ sous $\mathbb{P}^*$ donc on a $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[f(S_t(1+U_{t+1})|\mathcal{F}_t] = g_t(S_t)$ avec $g_t(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[f(x(1+U_{t+1})]$. Donc S est un processus de Markov sous $\mathbb{P}^*$. De plus, $\mathbb{P}^*(U_{t+1} = h_{t+1}) = \pi_{t+1}$ ce qui donne

$$g_t(x) = \pi_{t+1} f(x(1+h_{t+1})) + (1-\pi_{t+1}) f(x(1+b_{t+1})).$$

En posant $f = \mathbf{1}_{\{y\}}$, on obtient la matrice de transition P_t. $\square$

Calcul du prix d'une option europèenne

On s'intéresse au prix d'une option européenne de payoff $h_T = h(S_T)$. Soit V_t le prix à l'instant t d'une telle option c'est-à-dire l'unique valeur à l'instant t de toute stratégie de réplication de h_T.

Theorem

Soit $(v_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $v_T(x) = h(x)$ et

$$v_t(x) = \frac{1}{1+r_t}\Big(\pi_{t+1} v_{t+1}(x(1+h_{t+1})) + (1-\pi_{t+1}) v_{t+1}(x(1+b_{t+1}))\Big).$$

Alors, pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$, on a

$$V_t = v_t(S_t).$$

La stratégie de couverture parfaite (par réplication) de l'option est caractérisée par la quantité d'actif risqué $\Phi_t = \varphi_t(S_{t-1})$ avec

$$\varphi_t(x) = \frac{v_t(x(1+h_t)) - v_t(x(1+b_t))}{x(h_t - b_t)}.$$

Démonstration.

Le premier résultat est une application de la proposition sur l'évaluation des options européennes de type vanille avec $\rho_{t+1} = r_t$. Pour obtenir les paramètre de couverture, on a

$$V_t = v_t(S_t) = \Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t S_t$$

ce qui donne

$$\mathbf{1}_{\{U_t=h_t\}} v_t(S_{t-1}(1+h_t)) = \mathbf{1}_{\{U_t=h_t\}} (\Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t S_{t-1}(1+h_t))$$
$$\mathbf{1}_{\{U_t=b_t\}} v_t(S_{t-1}(1+b_t)) = \mathbf{1}_{\{U_t=b_t\}} (\Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t S_{t-1}(1+b_t))$$

en passant à l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[.|\mathcal{F}_{t-1}]$, on obtient

$$\pi_t v_t(S_{t-1}(1+h_t)) = \pi_t(\Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t S_t)$$
$$(1-\pi_t) v_t(S_{t-1}(1+b_t)) = (1-\pi_t)(\Phi_t^0 S_t^0 + \Phi_t S_t)$$

d'où

$$\Phi_t = \frac{v_t(S_{t-1}(1+h_t) - v_t(S_{t-1}(1+b_t))}{S_{t-1}(h_t - b_t)} = \varphi_t(S_{t-1}).$$

$\square$

Cas du modèle binomial homogène

On suppose içi $r_t = r$, $b_t = b$, $h_t = h$ donc $\pi_t = \pi = \frac{r-b}{h-b}$ pour tout $t \in \{1, \cdots, T\}$.

Theorem

Le marché binomial est viable si et seulement si

$$-1 < b < r < h.$$

Il est alors complet. En posant $p^*(h) = \pi = \frac{r-b}{h-b}$ et $p^*(b) = 1 - \pi$. L'unique probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ est définie par

$$\mathbb{P}^* = \otimes_{t=1}^{T} p*.$$

Sous $\mathbb{P}^*$, les rendements $(U_t)_{1 \leqslant t \leqslant T}$ sont i.i.d. de loi $\mathbb{P}^*_{U_1} = p^*$.

Pricing d'options européennes

Theorem

Soit $(p_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ la suite de fonction de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} p_T(x) & = h(x) \\ p_t(x) & = \frac{1}{1+r}\left(\pi p_{t+1}(x(1+h)) + (1-\pi)p_{t+1}(x(1+b))\right), \; t \in \{0, \cdots, T-1\} \end{cases}$$

alors le prix à la date t de l'option de maturité T et de payoff $h(S_T)$ vérifie

$$p_t = p_t(S_t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

De plus, on a

$$p_t(x) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \sum_{j=0}^{T-t} \frac{(T-t)!}{j!(T-t-j)!}(1-\pi)^{T-t-j}\pi^j h(x(1+h)^j(1+b)^{T-t-j})$$

et

$$\varphi_t(x) = \frac{p_t(x(1+h)) - p_t(x(1+b))}{x(h-b)}.$$

Démonstration.

Il s'agit essentiellement d'application de résultats précédents. On a

$$p_t(x) = \frac{S_T^0}{S_t^0}\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\Big[h(S_T)|S_t = x\Big] = \frac{1}{(1+r)^{T-t}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\Big[h(S_t\prod_{s=t+1}^{T}(1+U_s))|S_t = x\Big]$$

$$= \frac{1}{(1+r)^{T-t}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\Big[h(x\prod_{s=t+1}^{T}(1+U_s))\Big]$$

en utilisant le fait que $(U_s)_{t+1\leqslant s\leqslant T}$ sont indépendants de $\mathcal{F}_t$ sous $\mathbb{P}^*$. En utilisant

$$\mathbb{P}^*\Big(\prod_{s=t+1}^{T}(1+U_s) = (1+h)^j(1+b)^{T-t-j}\Big) = \pi^j(1-\pi)^{T-t-j}.$$

il vient

$$p_t(x) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}}\sum_{j=0}^{T-t}\frac{(T-t)!}{j!(T-t-j)!}(1-\pi)^{T-t-j}\pi^j h(x(1+h)^j(1+b)^{T-t-j}).$$

Plan du chapitre 4

Une option américaine de payoff $H = (H_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est un contrat donnant le droit à l'acheteur d'exercer l'option à n'importe quelle date $t \in \{0, \cdots, T\}$ et de recevoir H_t.

◦ Quel est le prix d'une telle option ?

On raisonne par absence d'opportunité d'arbitrage. Par récurrence descendante, on note U_t le prix à l'instant t de l'option américaine.

◦ Le prix à l'instant T vaut $U_T = H_T$.

◦ A l'instant $T-1$, il y a deux possibilités :

- Si l'acheteur exerce l'option, il reçoit H_{T-1}
- Si l'acheteur n'exerce pas et exerce en T, il recevra en T la somme $U_T = H_T$ ce qui équivaut à recevoir en $T-1$ la somme

$$\frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[H_T|\mathcal{F}_{T-1}].$$

Si je suis dans l'état $S_{T-1} = x$ (cadre Markovien) et $H_T = h(S_T)$ alors on a

$$\frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[H_T|\mathcal{F}_{T-1}] = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[h(S_{T-1}(1+U_T)|S_{T-1}]$$
$$= \frac{1}{1+r}\Big(\pi h(S_{T-1}(1+h)) + (1-\pi)h(S_{T-1}(1+b))\Big).$$

∘ L'acheteur compare ces deux sommes et choisit la voie la plus profitable et reçoit donc en $T-1$

$$U_{T-1} = \max\left(H_{T-1}, \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[U_T|\mathcal{F}_{T-1}]\right).$$

En $T-1$, il exercera l'option si $H_{T-1} \geqslant \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[U_T|\mathcal{F}_{T-1}]$ et sinon il attendra la date T.

∘ A un instant t quelconque, il a encore deux possibilités :

- exercer en t et recevoir H_t
- attendre en $t+1$. Il est alors ramenée à une option américaine avec exercice possible en $t+1, \cdots, T$. Ce qui est équivalent à recevoir U_{t+1} en $t+1$ ou encore

$$\frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t] \quad \text{à la date } t.$$

∘ Donc par AOA,
$U_t = \max(H_t, \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]) \Leftrightarrow \widetilde{U}_t = \max(\widetilde{H}_t, \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[\widetilde{U}_{t+1}|\mathcal{F}_t])$

Par conséquent, par AOA, le prix $U = (U_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ de l'option américaine de payoff H vérifie

$$\begin{cases} \widetilde{U}_T &= \widetilde{H}_T \\ \widetilde{U}_t &= \max(\widetilde{H}_t, \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[\widetilde{U}_{t+1}|\mathcal{F}_t]), \quad 0 \leqslant t \leqslant T-1. \end{cases}$$

Autrement dit, $\widetilde{U} = (\widetilde{U}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est l'enveloppe de Snell de $\widetilde{H} = (\widetilde{H}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ sous la probabilité risque-neutre. On sait alors

$$\widetilde{U}_0 = U_0 = \sup_{\nu \in \mathcal{S}_{0,T}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}\left[\widetilde{H}_\nu\right]$$

où $\mathcal{S}_{0,T}$ est le temps d'arrêt à valeurs dans $\{0, \cdots, T\}$ et le temps d'arrêt optimal est donné par

$$\nu = \min\left\{s \geqslant 0 : \widetilde{U}_s = \widetilde{H}_s\right\}$$

donc

$$U_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[\widetilde{H}_\nu] = \sup_{\nu \in \mathcal{S}_{0,T}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[\widetilde{H}_\nu].$$

Exemple : evaluation du Put américain

On considère le cas d'un payoff $H_t = h(S_t)$ pour le payoff du Put $h(x) = (x - K)_+$. Le prix est donné par l'enveloppe de Snell $(U_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$

$$\begin{cases} U_T & = h(S_T), \\ U_t & = \max(h(S_t), \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]) \end{cases}$$

Dans le cas $T = 2$, on a l'arbre

$$\begin{array}{llll}
 & & \xrightarrow{\pi} S_2 & = S_0(1+h)^2 \\
 & S_1 = S_0(1+h) & & \\
\xrightarrow{\pi} & & \xrightarrow{1-\pi} S_2 & = S_0(1+h)(1+b) \\
\xrightarrow{1-\pi} & & \xrightarrow{\pi} S_2 & = S_0(1+h)(1+b) \\
 & S_1 = S_0(1+b) & & \\
 & & \xrightarrow{1-\pi} S_2 & = S_0(1+b)^2
\end{array}$$

On note $S_{t,k} = S_0(1+h^k(1+b)^{t-k}$, le prix à l'instant t après k montées et $t-k$ baisses. $\mathbb{P}^*(S_t = S_{t,k}) = C_t^k \pi^k (1-\pi)^{t-k}$. On calcule le prix de l'option américaine sur chaque noeud de l'arbre par les formules suivantes :

$$U_T(S_{T,k}) = h(S_{T,k})$$

$$\begin{aligned} U_t(S_{t,k}) &= \max(h(S_{t,k}), \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{P}*}[U_{t+1}(S_{t+1})|S_t = S_{t,k}]) \\ &= \max\left(h(S_{t,k}), \frac{1}{1+r}\Big(U_{t+1}(S_{t,k}(1+h))\pi + U_{t+1}(S_{t,k}(1+b))(1-\pi)\Big)\right) \end{aligned}$$

◦ Exercice : Calculer le prix du Put américain de caractéristiques : $T = 3$, $K = S_0 = 100$, $h = 0.1$, $b = -0.1$, $r = 0.05$. Quel est le temps d'exercice optimal de l'option ?