Examen : Modèles mathématiques en finance

11 mai 2023

Durée : 2h00

Les notes de cours ainsi que les téléphones portables sont interdits pendant toute la durée de l'épreuve.
La calculatrice est autorisée. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (Questions du cours. (8 pts)).

1. (1pt) Donner la définition d'une opportunitée/stratégie d'arbitrage dans un **modèle multi-périodes à T périodes, i.e. à $T+1$ dates**.
2. (1pt) Donner la définition d'un marché complet.
3. (1pt) Donner la définition de l'enveloppe de Snell associée au processus $(H_t)_{t\in\{0,\cdots,T\}}$.
4. Soit $\Phi = (\Phi_t)_{t\in\{0,\cdots,T\}}$ une stratégie de portefeuille et $V_t^{x,\Phi} = x + \langle \Phi_t, \Delta S_t \rangle$ la valeur du portefeuille de stratégie Φ sur les $d+1$ actifs de prix $S_t = (S_t^0, \cdots, S_t^d)$ à l'instant t.
   (a) (1pt) Sous quelle condition le portefeuille est-il **auto-financant** ? On écrira précisément la condition d'auto-financement.
   (b) (1pt) Sous cette condition, donner (et démontrer) alors une autre expression pour la valeur du portefeuille $V_t^{x,\Phi}$.
5. On se place toujours dans un **modèle multi-périodes à T périodes, i.e. à $T+1$ dates** avec un actif risqué de prix S_t à l'instant t. Le taux sans risque est noté r. On note $\widetilde{S}$ l'actif risqué actualisé, c'est-à-dire $\widetilde{S}_t = S_t/(1+r)^t$. On suppose qu'il existe une probabilité risque neutre, notée $\mathbb{P}^*$ et que l'espace de probabilité est muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,\cdots,T\}}$ pour laquelle S est adapté.
   (a) (2pts) Démontrer que si Φ est un **processus $\mathcal{F}$-prévisible** et **borné** alors le processus $\widetilde{V} = (\widetilde{V}_t^{x,\Phi})_{t\in\{0,\cdots,T\}}$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$-martingale. On
   (b) (1pt) Donner l'expression du prix à la date $t \in \{0, \cdots, T\}$ d'une option de payoff $h(S_T)$ à l'aide du principe d'évaluation risque-neutre vu en cours.

Exercice 2. (Modèle binomial à deux périodes (5 pts))

Dans tout cet exercice, on se place dans un modèle binomial à deux périodes avec trois dates $t = 0, 1, 2$. Le taux sans risque est de 5% et on utilise les mêmes notations que dans le cours. Le prix initial de l'actif risqué est $S_0 = 100$. On prend $h = 0.1$ et $b = -0.1$. L'espace de probabilité non redondant $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est muni de la filtration $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,2\}}$ vérifiant $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$ et $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$.

1. (1.5 pts)
   (a) (0.5 pt) Représenter l'arbre d'évolution à trois dates du prix de l'actif risqué.
   (b) (0.5 pt) Sous quelle(s) condition(s) sur les paramètres a-t-on absence d'opportunité d'arbitrage dans un tel modèle ? L'absence d'opportunité d'arbitrage est-elle vérifiée ?
   (c) (0.5 pt) Calculer l'unique probabilité risque-neutre dans ce modèle. On la caractérisera sur chaque élément $w \in \Omega$.
2. (1 pt) On s'intéresse au prix d'un **Put européen** de maturité $T = 2$ et de prix d'exercice $K = 105$ euros. Calculer par récurrence descendante le prix à la date 0 de ce **Put européen** en précisant le prix du Put à chaque date sur chaque noeud de l'arbre.
3. (1.5 pts) Rappeler **la formule de parité Call-Put à la date** t dans ce modèle. En déduire le prix **à la date** 0 du **Call européen** de maturité $T = 2$ et de prix d'exercice $K = 105$ euros.
4. (1 pt) On considère maintenant une **option Call digitale** de payoff $h = \mathbf{1}_{\{S_2 \geq K\}}$, de maturité $T = 2$ et de prix d'exercice $K = 100$. Calculer le prix à la date 0 d'une telle option.

Exercice 3. (Modèle de Cox-Ross-Rubinstein (CRR) à T périodes (7 pts))

On considère un marché financier de type binomial comprenant T périodes et deux actifs : l'actif sans risque de prix $S_t^0 = (1 + r)^t$, $0 \leq t \leq T$ et l'actif de prix $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ donné par la dynamique suivante :

$$\forall t \in \{0, \cdots, T-1\}, \quad S_{t+1} = S_t(1 + U_{t+1}),$$

où $U_{t+1} \in \{b, h\}$ avec $S_0 > 0$ et $-1 < b < r < h$. Soit $\mathbb{P}^*$ la probabilité risque neutre équivalente à $\mathbb{P}$. On introduit la notation

$$\mathbb{P}^*(U_1 = h) = 1 - \mathbb{P}^*(U_1 = b) = \pi.$$

On rappelle que sous $\mathbb{P}^*$, les variables aléatoires $(U_t)_{t\geq 1}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

1. (1 pt) Quelle est la valeur de π en fonction des paramètres du modèle ? Que vaut alors $1 + \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[U_t]$ pour $t \in \{1, \cdots, T\}$?
   D'après le cours, on a
   $$\pi = \frac{r-b}{h-b}.$$
   Ensuite, en utilisant le fait que $(\tilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P}^\star)$- martingale et $\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1}\frac{1+U_t}{1+r}$, on obtient
   $$\tilde{S}_{t-1} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[\tilde{S}_t \,|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \tilde{S}_{t-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[\frac{1+U_t}{1+r}\,|\mathcal{F}_{t-1}\right]$$
   ce qui donne $1 + \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[U_t|\mathcal{F}_{t-1}] = 1 + r$. Par la propriété d'enboîtement de l'espérance conditionnelle, on obtient
   $$1 + \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[U_t] = 1 + r.$$

2. (2 pts) On considère l'actif *lookback* de payoff $H = S_T - \underline{S}_T$, où $\underline{S}_t := \min_{0\leq s\leq t} S_s$. On note C_t le prix à l'instant $t \in \{0, \cdots, T\}$ de ce produit financier.
   a) (1 pt) Montrer que si $b \geq 0$, l'option de payoff H est en réalité une option *Call* standard de strike $K = S_0$.
   Il faut remarquer que si $b \geq 0$ alors $1+U_t \geq 1+b \geq 1$ et donc $S_t = S_0(1+U_1)\times\cdots\times(1+U_{t-1}) \geq S_0$ pour $t \geq 1$. Par conséquent, si $b \geq 0$ alors $\forall t = 0, \cdots, T$
   $$\underline{S}_t = S_0,$$
   Ainsi $H = S_T - \underline{S}_T = S_T - S_0 = (S_T - S_0)_+$. Il s'agit bien du payoff d'une *option Call* de strike $K = S_0$.

b) (1 pt) Donner alors l'expression du prix C_t en fonction de S_t et S_0. On montrera en particulier que le prix est une fonction affine de S_t. D'après le principe de valorisation risque-neutre, on a

$$\begin{aligned} C_t &= (1+r)^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[\frac{S_T - S_0}{(1+r)^T} | \mathcal{F}_t\right] \\ &= (1+r)^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[\tilde{S}_T\right] - \frac{S_0}{(1+r)^{T-t}} \\ &= (1+r)^t \tilde{S}_t - \frac{S_0}{(1+r)^{T-t}} \\ &= S_t - \frac{S_0}{(1+r)^{T-t}}. \end{aligned}$$

On a utilisé le caractère martingale de $\tilde{S}$ sous la probabilité risque neutre.

3. (3 pts) On suppose maintenant que $b < 0$ et $h \geq 0$. On désire montrer dans cette question que le prix C_t est de la forme $C_t = c_t(S_t, \underline{S}_t)$.

a) (1 pt) A la date T, déterrminer l'expression de la fonction $(x, y) \mapsto c_T(x, y)$.
Clairement à la date T, le prix $C_T = c_T(S_T, \underline{S}_T)$ est égale au payoff donc $c_T(S_T, \underline{S}_T) = S_T - \underline{S}_T$. Par conséquent,

$$c_T(x, y) = x - y.$$

b) (1 pt) En utilisant l'égalité $\underline{S}_{t+1} = \min(\underline{S}_t, S_{t+1})$, montrer que si $(x, y) \mapsto c_{t+1}(x, y)$ est la fonction de prix à l'instant $t+1$ alors le prix à l'instant t vérifie

$$\frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[c_{t+1}(S_{t+1}, \underline{S}_{t+1}) | \mathcal{F}_t] = c_t(S_t, \underline{S}_t)$$

pour une certaine fonction $(x, y) \mapsto c_t(x, y)$ que l'on explicitera en fonction de c_{t+1}.
Tout d'abord, le principe de valorisation risque neutre donne que le prix à la date t est

$$C_t = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[c_{t+1}(S_{t+1}, \underline{S}_{t+1}) | \mathcal{F}_t].$$

Maintenant, en utilisant l'identité $\underline{S}_{t+1} = \min(\underline{S}_t, S_{t+1}) = \min(\underline{S}_t, S_t(1+U_{t+1}))$ avec U_{t+1} indépendant de $\mathcal{F}_t$ et $(S_t, \underline{S}_t)$ variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[c_{t+1}(S_{t+1}, \underline{S}_{t+1}) | \mathcal{F}_t] &= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[c_{t+1}(S_t(1+U_{t+1}), \min(\underline{S}_t, S_t(1+U_{t+1}))) | \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[c_{t+1}(S_t(1+U_{t+1}), \min(\underline{S}_t, S_t(1+U_{t+1}))) | S_t] \\ &= c_t(S_t, \underline{S}_t) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} c_t(x, y) &:= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[c_{t+1}(x(1+U_{t+1}), \min(y, x(1+U_{t+1})))] \\ &= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[c_{t+1}(x(1+U_1), \min(y, x(1+U_1)))] \\ &= \frac{1}{1+r}(\pi c_{t+1}(x(1+h), \min(y, x(1+h))) + (1-\pi) c_{t+1}(x(1+b), \min(y, x(1+b)))). \end{aligned}$$

c) (1 pt) A l'aide d'une récurrence descendante montrer que pour $t \in \{0, \cdots, T\}$,$(x, y) \mapsto c_t(x, y)$ est décroissante en la variable y (à x fixé) et vérifie l'inégalité : $c_t(x, y) \geq x - \frac{y}{(1+r)^{T-t}}$.
Tout est vrai à la date T. Maintenant, si les deux propriétés sont vraies à la date $t+1$, montrons qu'elles le restent à la date t. Si $y \mapsto c_{t+1}(x, y)$ est décroissante alors $y \mapsto c_{t+1}(x(1+h), \min(y, x(1+h)))$, $c_{t+1}(x(1+b), \min(y, x(1+b)))$ sont décroissantes donc

$$y \mapsto c_t(x, y) = \frac{1}{1+r}(\pi c_{t+1}(x(1+h), \min(y, x(1+h))) + (1-\pi) c_{t+1}(x(1+b), \min(y, x(1+b)))).$$

Par ailleurs, on a

$$c_{t+1}(x(1+h),\min(y,x(1+h))) \geq x(1+h) - \frac{\min(y,x(1+h)))}{(1+r)^{T-(t+1)}} \geq x(1+h) - \frac{y}{(1+r)^{T-(t+1)}}$$

et

$$c_{t+1}(x(1+b),\min(y,x(1+b))) \geq x(1+b) - \frac{\min(y,x(1+b)))}{(1+r)^{T-(t+1)}} \geq x(1+b) - \frac{y}{(1+r)^{T-(t+1)}}$$

ce qui donne

$$c_t(x,y) \geq \frac{1}{1+r}\Big(\pi(x(1+h) - \frac{y}{(1+r)^{T-(t+1)}}) + (1-\pi)(x(1+b) - \frac{y}{(1+r)^{T-(t+1)}})\Big) = x - \frac{y}{(1+r)^{T-t}}.$$

Les deux propriétés restent donc vraies à la date t. Conclusion : Les deux propriétés sont vraies pour tout $t = 0, \cdots, T$.

4. (1 pt) On se place dans le cadre d'un modèle à deux périodes $T = 2$ et on prend $S_0 = 100$, $h = 0.1$, $b = -0.1$ et $r = 0.05$. Calculer le prix c_0 à la date 0 de l'option lookback.
Il s'agit d'un simple calcul numérique à l'aide de la formule

$$c_0 = \frac{1}{(1+r)^2}\Big(\pi^2(S_0(1+h)^2 - S_0) + \pi(1-\pi)(S_0(1+h)(1+b) - S_0(1+b))$$
$$+ \pi(1-\pi)(S_0(1+h)(1+b) - S_0(1+h)(1+b)) + (1-\pi)^2(S_0(1+b)^2 - S_0(1+b)^2)\Big)$$

car pour le scénario $\{h,b\}$, $\min_{0\leq t\leq 2} S_t = S_0(1+h)(1+b) = 99$ et pour $\{b,h\}$, $\min_{0\leq t\leq 2} S_t = S_0(1+b) = 90$. Il suffit ensuite de faire l'application numérique.